Chaînes de Markov

1. Définitions

Andrei Andreyevich ***Markov***
(1856 - 1922)

Généralement, un processus stochastique est une suite d'expériences dont le résultat dépend du hasard. Ici, nous admettrons qu'en certains temps 0, 1, 2, ..., t, nous observons un système. Celui-ci peut se trouver dans l'un des états d'une collection finie d'états possibles. L'observation du système est ainsi considérée comme une expérience dont le résultat (aléatoire) est l'état dans lequel se trouve le système.
Nous supposons que nous connaissons pour chaque paire d'états i et j, et pour chaque instant t, la probabilité $p_{ij}(t)$ que le processus soit dans l'état j à l'instant t+1 étant donné qu'il se trouve dans l'état i à l'instant t. De plus, la probabilité $p_{ij}(t)$ sera supposée **ne pas dépendre de *t***.
Un tel processus est appelé chaîne de Markov (à temps discret et avec un ensemble fini d'états), du nom de son inventeur russe *Andrei Andreyevich Markov*.
Avec ces hypothèses, nous pouvons décrire le système en donnant l'ensemble $\{u_1, ..., u_m\}$ des états u_i possibles et une matrice P de dimensions mxm dont le terme p_{ij} est la probabilité que le processus soit dans l'état j à l'instant t+1 étant donné qu'il se trouve dans l'état i à l'instant t, **pour tout *t***. P est appelée matrice de transition du système.
On représente généralement P par un graphe orienté G dont les sommets correspondent aux m états et les arcs aux couples ordonnés d'états (i, j) tels que $p_{ij} > 0$.

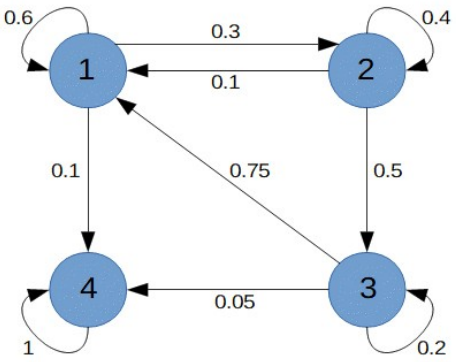
Exemple

Pour représenter le passage d'une molécule de phosphore dans un écosystème, nous considérerons quatre états possibles :

1. la molécule est dans le sol,
2. la molécule est dans l'herbe,
3. la molécule a été absorbée par du bétail,
4. la molécule est sortie de l'écosystème.

La matrice de transition est la suivante : $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{20} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Remarquez que **la somme de chaque ligne vaut 1**. Cette matrice correspond au graphe ci-dessous :



Propriété 1

La probabilité $p_{ij}^{(t)}$ que le système soit dans l'état j au temps t sachant qu'il était dans l'état i au temps 0 est donné par $(P^t)_{i,j}$ (le terme i,j de la t-ième puissance de P).

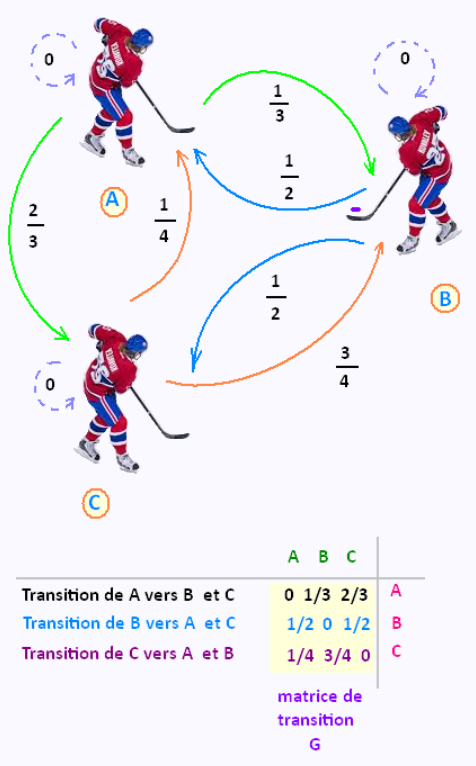
Propriété 2

Si on ne connaît pas l'état initial, on peut donner un vecteur de probabilité $\pi^{(0)} = (\pi_1^{(0)}, ..., \pi_m^{(0)})$ où $\pi_i^{(0)}$ est la probabilité que le système se trouve dans l'état i au temps 0.
Si $\pi^{(t)}$ est le vecteur donnant les probabilités d'occupation des états au temps t (autrement dit la distribution), on a :

$$\pi^{(t)} = \pi^{(0)} P^t$$

Exercice 1

Dans une équipe de Hockey, on étudie les passes de la rondelle que font les trois joueurs A, B et C entre eux.
Les probabilités qu'un joueur passe la rondelle à un autre sont représentées sur le graphe ci-dessous.



	A	B	C	
Transition de A vers B et C	0	1/3	2/3	A
Transition de B vers A et C	1/2	0	1/2	B
Transition de C vers A et B	1/4	3/4	0	C

matrice de transition G

À partir de ce graphe, on déduit la matrice de transition P correspondante. Si c'est le joueur B qui possède la rondelle au début du jeu, quelle est, par exemple la probabilité que le joueur C la possède après la troisième passe ?

Exercice 2

Écrivez un programme qui simule une chaîne de Markov donnée par sa matrice de transition. Comme résultat, on veut la liste des états successifs du processus et le pourcentage de fois où le processus a été dans chacun des états.
Utilisez votre programme pour simuler la chaîne de Markov donnée en exemple.
Partant du vecteur initial $\pi^{(0)} = (1, 0, 0, 0)$, déterminez $\pi^{(10)}$, $\pi^{(100)}$ et $\pi^{(1000)}$ par calcul*, puis par simulation en utilisant votre programme.

*Vous calculerez P^t avec Wolfram Alpha.

Exercice 3

Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), non malade et non immunisé (S). D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :

- étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité 0.9 ou passer à l'état S avec une probabilité 0.1 ;
- étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité 0.5 ou passer à l'état M avec une probabilité 0.5 ;
- étant malade, il peut le rester avec une probabilité 0.2 ou passer à l'état I avec une probabilité 0.8.

Tracez un graphe probabiliste pour décrire cette situation et écrivez la matrice de transition. Calculez l'état de probabilité de l'individu au bout de trois mois, de six mois, d'un an, de deux ans, pour chacune des situations suivantes :

- au départ, il est immunisé (I);
- au départ, il est non malade et non immunisé (S);
- au départ, il est malade (M).

Pouvez-vous donner des éléments sur la proportion d'individus malades dans la population étudiée ?

2. Distribution limite

On constate souvent (par exemple à l'exercice 2) que la distribution $\pi(t)$ converge vers une distribution limite π si $t \to \infty$. Si tel est le cas, on dit que cette dernière définit un **régime permanent** du processus stochastique. Le régime permanent n'est pas influencé par le choix de la distribution initiale.

Propriété 3

Si la matrice de transition P est telle qu'une au moins de ses puissances n'a que des termes strictement positifs, alors $\pi(t) \to \pi$ quelle que soit la distribution initiale $\pi(0)$ et $P^t \to P^*$ lorsque $t \to \infty$. π est un vecteur de probabilité strictement positif et P^* une matrice dont toutes les lignes sont identiques au vecteur limite π. En plus, $\pi P^* = \pi$.

La démonstration de cette condition d'existence dépasse le cadre de ce cours.

Exercice 4

Soit la matrice stochastique $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrez que la chaîne de Markov définie par P converge et calculez la distribution limite.

Exercice 5

Soit la matrice stochastique $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{20} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrez que la chaîne de Markov définie par P converge et calculez la distribution limite.

Exercice 6

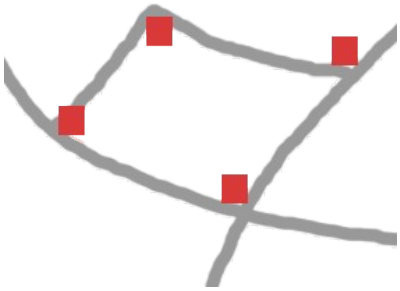
Un service de météo a constaté après de longues années que le temps qu'il fera demain dépend essentiellement du temps qu'il faisait hier et du temps qu'il fait aujourd'hui. Les probabilités de transition ont été établies ainsi :

Hier	Aujourd'hui	Demain	
		Beau	Mauvais
Beau	Beau	0.8	0.2
Beau	Mauvais	0.4	0.6
Mauvais	Beau	0.6	0.4
Mauvais	Mauvais	0.1	0.9

1. Modélisez ce processus à l'aide d'une chaîne de Markov.
2. Calculez le nombre moyen de jours de beau temps par année.

Exercice 7

Un ivrogne se déplace dans les quatre bistrots du village (voir plan ci-dessous) d'une manière bien personnelle : en sortant d'un bistrot, il lance une pièce de monnaie pour savoir dans lequel des deux autres bistrots les plus proches il entrera.

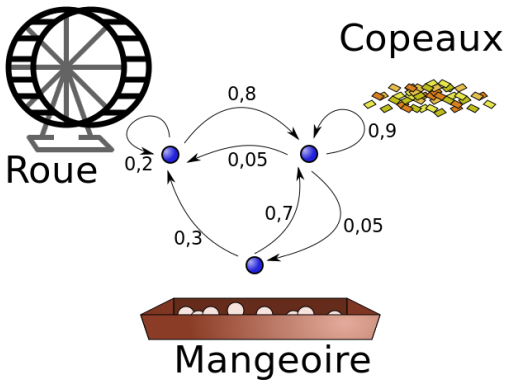


1. Modélisez ce processus à l'aide d'une chaîne de Markov.
2. Montrez que cette chaîne de Markov n'a pas de distribution limite.

Exercice 8

Source : Wikipédia

Humphrey le hamster ne connaît que trois endroits dans sa cage : les copeaux où il dort, la mangeoire où il mange et la roue où il fait de l'exercice.
Ses journées sont assez semblables les unes aux autres, et son activité se représente aisément par une chaîne de Markov. Toutes les minutes, il peut soit changer d'activité, soit continuer celle qu'il était en train de faire. L'appellation *processus sans mémoire* n'est pas du tout exagérée pour parler de Humphrey...



- Quand il dort, il a 9 chances sur 10 de ne pas se réveiller la minute suivante.
- Quand il se réveille, il y a 1 chance sur 2 qu'il aille manger et 1 chance sur 2 qu'il parte faire de l'exercice.
- Le repas ne dure qu'une minute, après il fait autre chose.
- Après avoir mangé, il y a 3 chances sur 10 qu'il parte courir dans sa roue, mais surtout 7 chances sur 10 qu'il retourne dormir.
- Courir est fatiguant pour Humphrey ; il y a 8 chances sur 10 qu'il retourne dormir au bout d'une minute. Sinon, il continue en oubliant qu'il est déjà un peu fatigué.

Prenons l'hypothèse que Humphrey dort lors de la première minute de l'étude. Quel pourcentage de son temps Humphrey passe-t-il à dormir ?

3. Chaîne absorbante

Une chaîne de Markov est absorbante si et seulement si :

1. il y a au moins un état absorbant,
2. de tout état non absorbant, on peut atteindre un état absorbant.

Par exemple, l'état 4 du premier exemple de ce chapitre est un état absorbant. Comme on peut atteindre cet état depuis tous les autres, la chaîne de Markov est absorbante.

Propriété 4

Pour toute chaîne de Markov absorbante et pour tout état de départ, la probabilité de se trouver dans un état absorbant au temps t tend vers 1 lorsque t tend vers l'infini.

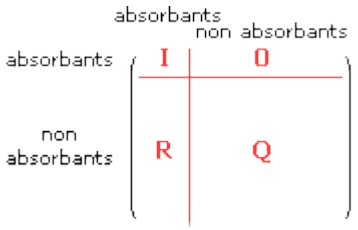
Délais d'absorption et probabilité d'absorption

Lorsque l'on a affaire à une chaîne de Markov absorbante, on est généralement intéressé par les deux questions suivantes :

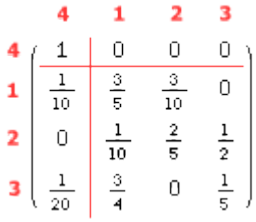
- Combien de temps faudra-t-il en moyenne pour arriver dans un état absorbant, étant donné son état initial ?
- S'il existe plusieurs états absorbants, quelle est la probabilité de tomber dans un état absorbant donné ?

Forme canonique de la matrice P

Si une chaîne de Markov est absorbante, on placera au début les états absorbants ; on aura alors une matrice de transition de la forme suivante (I est une matrice unité et 0 une matrice de 0) :



Dans l'exemple du phosphore de la page 1, nous avons (les numéros des états sont en rouge) :



La matrice $N = (I–Q)^{-1}$ est appelée la matrice fondamentale de la chaîne absorbante.

Propriété 5

Le nombre moyen e_{ij} de passages à l'état j (non absorbant) avant l'absorption quand on part de l'état i (non absorbant) est donnée par $e_{ij} = (N)_{ij}$.

Le nombre moyen d'étapes avant absorption sachant que l'on part de l'état i (non absorbant) est la somme des termes de la i-ème ligne de N.

Toujours dans l'exemple du phosphore, on a :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \qquad I - Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} & 0 \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix},$$

$$\text{d'où } N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{320}{37} & \frac{160}{37} & \frac{100}{37} \\ \frac{910}{111} & \frac{640}{111} & \frac{400}{111} \\ \frac{300}{37} & \frac{150}{37} & \frac{140}{37} \end{pmatrix}$$

On tire de la première ligne le nombre moyen d'étapes avant absorption en partant de l'état 1 : $\frac{320}{37}+\frac{160}{37}+\frac{100}{37}=15.67$

Propriété 6

Dans une chaîne de Markov absorbante avec P mise sous forme canonique, le terme b_{ij} de la matrice $B = N \cdot R$ est la probabilité d'absorption par l'état absorbant j sachant que l'on part de l'état i.

Dans l'exemple du phosphore, on a :

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ 0 \\ \frac{1}{20} \end{pmatrix} \text{ d'où } B = N \cdot R = \begin{pmatrix} \frac{320}{37} & \frac{160}{37} & \frac{100}{37} \\ \frac{910}{111} & \frac{640}{111} & \frac{400}{111} \\ \frac{300}{37} & \frac{150}{37} & \frac{140}{37} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ 0 \\ \frac{1}{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La probabilité d'être absorbé par l'unique état absorbant est 1 quel que soit l'état initial !

Exercice 9

Considérons un joueur qui possède 2 francs initialement. À chaque étape du jeu il peut gagner 1 franc avec probabilité p ou perdre 1 franc avec probabilité $1–p$. Il s'arrête lorsqu'il a gagné 4 francs ou lorsqu'il a tout perdu.

1. Représentez cette expérience par une chaîne de Markov.
2. Avec $p = 1/3$, calculez la probabilité de la ruine du joueur.
3. Avec $p = 1/3$, calculez la longueur moyenne d'une partie.

Exercice 10

Monsieur X se rend au Salon du Livre de Rigoleville dans l'espoir de trouver enfin un exemplaire du livre de Stendhal *Le Rose et le Vert*.
Le Salon compte cinq stands et les organisateurs se sont amusés aux cours des années précédentes à construire la matrice des probabilités de transition des visiteurs d'un stand à un autre :

de \ à	*Stand 1*	*Stand 2*	*Stand 3*	*Stand 4*	*Stand 5*
Stand 1	0	0.8	0	0	0.2
Stand 2	0.2	0	0.5	0.3	0
Stand 3	0	0	0	0.6	0.4
Stand 4	0.9	0	0.1	0	0
Stand 5	0.8	0	0	0.2	0

Sachant que seuls les stands 4 et 5 disposent du livre recherché et que Monsieur X commence par visiter le stand 1, quelle est la probabilité qu'il achète son livre au stand 4 plutôt qu'au stand 5 (Monsieur X achètera le premier exemplaire qu'il trouvera) ?

Exercice 11

Considérons une série de jets d'une pièce de monnaie normale. On notera *P* pour pile et *F* pour face.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une séquence *PFP* avant une séquence *PPP* ?
2. Quel est le nombre de jets nécessaires en moyenne pour réaliser l'une des deux séquences *PFP* et *PPP* ?

Exercice 12

La parade nuptiale des bourdons

Cet exercice est tiré du livre donné en référence. On s'y reportera pour avoir tous les détails de l'expérience. On ne présente ici que le minimum nécessaire à l'exercice.
Référence :
Mathématique & biologie. Une expérience pluridisciplinaire,
Éditions De Boeck,
Bruxelles, 2003, chapitre 7

Une séance d'accouplement peut se décomposer en 7 phases :

1. **Départ** (D) : mise en contact des bourdons mâle et des reines.
2. **Approche** (A) : un mâle se dirige vers la reine. Il s'approche à courte distance. Il est le comportement le plus fréquent et souvent suivi d'une récidive.
3. **Inspection de la femelle** (IF) : le mâle suit la reine avec ses antennes tendues vers elle. Il inspecte souvent la reine au niveau de la tête (région où se trouvent les glandes produisant les phéromones sexuelles), mais parfois au niveau de l'abdomen.
4. **Tentative d'accouplement** (T) : le mâle s'approche de la reine, il s'accroche à elle. Il frotte de ses pattes antérieures l'extrémité de l'abdomen de la femelle. Il sort ses génitalias (appareil reproducteur) et tente de pénétrer la reine.
5. **Accouplement** (Acc) : lors de l'accouplement, le comportement du mâle se caractérise par des mouvements de battements des pattes sur l'extrémité de l'abdomen de la reine.
6. **Sortie par abandon du mâle** (SA) : lors de la séquence de 15 minutes, le bourdon mâle peut adopter un comportement indifférent vis-à-vis de la reine; il sort de la parade nuptiale et n'y revient jamais.
7. **Sortie pour dépassement du temps** (ST) : l'observation est limitée à 15 minutes. Après cette durée, la probabilité d'accouplement peut être considérée comme presque nulle.

Approche du mâle

Inspection de la reine par le mâle

Tentative d'accouplement

Accouplement

Voici les statistiques obtenues pour 78 séances d'accouplement en laboratoire.

	suivi de						
	A	T	IF	Acc	ST	SA	Total
D	78	0	0	0	0	0	78
A	614	202	87	0	16	8	927
IF	83	0	0	0	3	1	87
T	152	0	0	35	7	8	202

1. Dessinez le graphe de transitions d'une parade nuptiale de bourdons.
2. Calculez les probabilités de transition d'un état à un autre et ajoutez-les au graphe.
3. Donnez la matrice correspondante de la chaîne de Markov.

4. Adaptez votre programme simulant une chaîne de Markov (voir exercice 2) à la situation présente. Utilisez ce programme pour simuler une parade nuptiale de bourdons.
5. Cette chaîne de Markov est une chaîne absorbante. Quel est le nombre moyen d'étapes avant absorption ? Trouvez le résultat théoriquement et par simulation.

---

4. Solutions des exercices

Exercice 1

Initialement, la rondelle est en B, donc le vecteur état du système est $\pi^{(0)} = (0, 1, 0)$. Après 3 étapes, l'état du système est $\pi^{(3)} = \pi^{(0)} P^3$. Il suffit de calculer P^3, puis de multiplier le vecteur $\pi^{(0)}$ par P^3.
La probabilité que le joueur C possède la rondelle après la troisième étape est la troisième composante du vecteur π_3 trouvé.
Du fait que $\pi^{(0)} = (0, 1, 0)$ et que seule la troisième composante du vecteur $\pi^{(3)}$ nous intéresse, le terme à retenir est $\pi_3^{(3)} = 17/48 = 0.3542$.

Exercice 2

$\Pi^{(1000)} = (1.4 \cdot 10^{-28}, 7.9 \cdot 10^{-29}, 5.3 \cdot 10^{-29}, 1) \cong (0, 0, 0, 1)$

Exercice 3

Répartition dans la population : 75.47 % de I, 15.09 % de S, 9.43 % de M

Exercice 4

La distribution limite est (0.4, 0.4, 0.2).

Exercice 5

La distribution limite est (0, 0, 0, 1).

Exercice 6

La distribution limite est (3/11, 1/11, 1/11, 6/11).
Dans une année, il y environ $365 \cdot (3/11+1/11) = 133$ jours de beau temps.

Exercice 7

On a numéroté les bistrots de 1 à 4 en les parcourant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (peu importe le bistrot no 1).
Il n'a pas de distribution limite. En partant du bistrot 1, si le nombre de transitions *n* est impair, l'ivrogne sera dans le bistrot 2 ou 4 avec une probabilité 1/2 ; si *n* est pair il sera dans le bistrot 1 ou 3 avec une probabilité 1/2.

Exercice 8

Humphrey passe 88.4 % de son temps à dormir.
Développements sur https://fr.wikipedia.org/wiki/Chaîne_de_Markov

Exercice 9

2. La probabilité de la ruine du joueur est de $\frac{4}{5}$

3. La durée moyenne d'une partie est de 3.6

Exercice 10

La probabilité que Mr. X achète son livre au stand 4 en partant du stand 1 est de $\frac{4}{7}$

Exercice 11

1. $\frac{3}{5}$ 2. 6.8

Exercice 12

3.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.954 & 0 & 0 & 0.034 & 0.012 \\ 0 & 0.094 & 0.662 & 0.218 & 0 & 0.017 & 0.009 \\ 0 & 0 & 0.75 & 0 & 0.175 & 0.035 & 0.04 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. 16.4673