Séries

Pour les exercices manquants ci-dessous, voir le corrigé du cahier sur le site nymphomath.ch/suites/

Exercice 3.3

pas évident!

En remarquant que $\boxed{\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-1}}$, on peut trouver une formule pour la nième somme partielle de cette série :

$$s_n = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \dots \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\dfrac{1}{n+1} \to 0$ quand $n \to \infty$, la somme de la série vaut 1.

Exercice 3.4

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2} = \frac{1}{5} \neq 0$$ $\Rightarrow$ d'après le th. 3.1, la série diverge.

Exercice 3.5

D'après le th. 3.2, $0 < \dfrac{1}{k+1} < \dfrac{1}{k}$ et $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, donc la série harmonique alternée converge.

Exercice 3.6

Non, car $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{3k}{4k-1} = \frac{3}{4} \neq 0$.

Exercice 3.7

Oui, car $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k^3+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$ et $\dfrac{(k+1)^2}{(k+1)^3+1} < \dfrac{k^2}{k^3+1}$

Exercice 3.8

Série de Riemann

Oui, car $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge et $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k)}{k^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Exercice 3.9

a. diverge, car $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$.

b. converge, car $\frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} \ldots < \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = 2$

c. diverge, car $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots = \frac{1}{2}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\right)}_{\text{diverge (série harmonique)}}$

d. diverge, car $\frac{1}{11} + \frac{1}{22} + \frac{1}{33} + \ldots = \frac{1}{11}\overbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\right)}$

e. diverge, car $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}} = \frac{1}{n+1}$

$$\begin{array}{cccccccccl} & \frac{1}{\sqrt{2}} & + & \frac{1}{\sqrt{6}} & + & \frac{1}{\sqrt{12}} & + & \frac{1}{\sqrt{20}} & \Leftarrow & \text{diverge} \\ & > & & > & & > & & > & & \Uparrow \\ (1+) & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{5} & \Rightarrow & \text{Série harmonique} \end{array}$$

f. diverge, car $\frac{2n}{(n+1)(n+2)} \geq \frac{1}{n+2}$ pour $n \geq 1$

$$\begin{array}{ccccccccccccl} & \frac{2}{2\cdot 3} & + & \frac{4}{3\cdot 4} & + & \frac{6}{4\cdot 5} & + & \frac{8}{5\cdot 6} & + & \frac{10}{6\cdot 7} & + & \ldots & \\ = & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{3} & + & \frac{3}{10} & + & \frac{4}{15} & + & \frac{5}{21} & + & \ldots & \\ & > & & > & & > & & > & & > & & & \\ \left(1 + \frac{1}{2} + \right) & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{5} & + & \frac{1}{6} & + & \frac{1}{7} & + & \ldots & \Rightarrow \text{diverge} \end{array}$$

Série harmonique

g. converge, car c'est une série de Riemann avec $\alpha = 2$ et des termes en moins. Donc elle converge, puisque la Série de Riemann converge.

Exercice 3.10

À partir de $n = 3$, $\ln(n) > 1$. Donc $\frac{\ln(n)}{n} > \frac{1}{n}$ qui diverge.

Donc $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k}$ diverge.

Exercice 3.11

a. $$c = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{(k+1)!}{10^{k+1}}}{\frac{k!}{10^{k}}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)\cancel{!}}{10^{\cancel{k+1}}}\cdot\frac{\cancel{10^{k}}}{\cancel{k!}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k+1}{10}\right| = \infty > 1$$

$\Rightarrow$ la série diverge

b. $$c = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{k+3}{2^{k+1}}}{\frac{k+2}{2^{k}}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k+3}{2^{\cancel{k+1}}}\cdot\frac{\cancel{2^{k}}}{k+2}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k+3}{2\cdot(k+2)}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ la série converge

c. $$c = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{k}}{2^{k+1}}}{\frac{3^{k-1}}{2^{k}}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{3^{\cancel{k}}}{2^{\cancel{k+1}}}\cdot\frac{\cancel{2^{k}}}{3^{\cancel{k-1}}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2} > 1$$

$\Rightarrow$ la série diverge.

d. $$c = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)\cancel{!}}{\cancel{3\cdot5\cdot7\cdots}(2k+3)}\cdot\frac{\cancel{3\cdot5\cdot7\cdots(2k+1)}}{\cancel{k!}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k+1}{2k+3}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ la série converge

e. $$c = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{(k+1)^2}\cdot\frac{k^2}{1}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k^2}{(k+1)^2}\right| = 1.$$

$\Rightarrow$ il y a doute

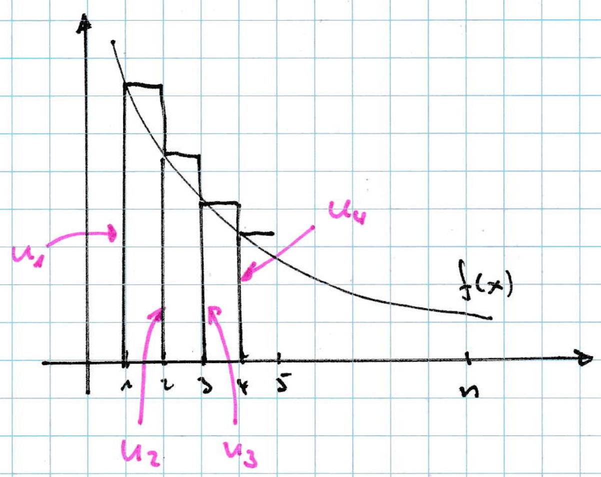
Exercice 3.12

a. $c = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{2^k}} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ converge

b. $c = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{3^k}{180\cdot 2^k}} = \underbrace{\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{180}}}_{\to 1}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$ diverge

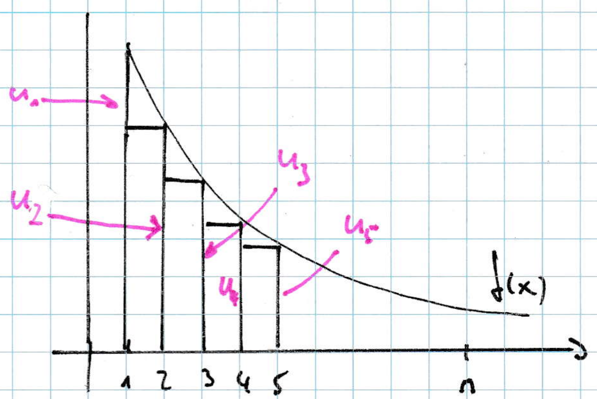
c. $c = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{2k}{3k+1}\right)^k} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{2k}{3k+1}\right) = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow$ converge

Exercice 3.13



$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k > \int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Si l'intégrale diverge, cette limite n'existe pas et la série diverge aussi.



La suite des sommes partielles est croissante puisque les u_k sont positifs. De plus, pour tout n,

$$s_n = u_1 + \sum_{k=2}^{\infty} u_k < u_1 + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Si l'intégrale existe, alors la suite s_n est croissante et bornée. Elle possède donc une limite s.

Exercice 3.14

a. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \underbrace{\left(\sqrt{2t+1}\right)}_{+\infty} - \underbrace{\sqrt{2\cdot 1+1}}_{\sqrt{3}} = +\infty$$

$\Rightarrow$ la série diverge

b. $f(x) = \dfrac{1}{4x^2}$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{4x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} \frac{1}{4x^2}\,dx = \underbrace{\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{4t}\right)}_{\to 0} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ la série converge

c. $f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) dx = \underbrace{\lim_{t \to \infty} \left(\frac{1}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{t}\right)\right)}_{\frac{1}{\pi}} - \frac{1}{\pi} \underbrace{\cos(\pi)}_{-1} = \frac{2}{\pi}$$

$\Rightarrow$ la série converge

d. voir exemples 1 et 2.

Exercice 3.15

a. $\displaystyle \lim_{k \to +\infty} \frac{\frac{1}{(k+2)^2-1}}{\frac{1}{(k+1)^2-1}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{(k+1)^2+1}{(k+2)^2-1} = \lim_{k \to \infty} \frac{k^2}{k^2} = 1 \Rightarrow$ doute (quotient)

$u_k = \frac{1}{(k+1)^2-1} = \frac{1}{k^2+2k} < \frac{1}{k^2} \quad \forall k$. Comme $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, $\sum u_k$ converge aussi

b. $u_k = \frac{1}{9k^2-3k-2} < \frac{1}{k^2} \quad \forall k$. Comme $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, $\sum u_k$ converge

c. $\displaystyle \lim_{k \to +\infty} \frac{k^2}{2k^2+1} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \sum u_k$ diverge

d. $\displaystyle \lim_{k \to \infty} \left(\frac{3k}{3k+1}\right)^k = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{3k+1-1}{3k+1}\right)^k = \lim_{k \to \infty} \left(1 - \frac{1}{3k+1}\right)^k =$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}} = \underbrace{\left(\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^{\frac{1}{3}}}_{e^{\frac{1}{3}}} \cdot \underbrace{\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}}_{1} = e^{3} \neq 0$$

$\sum u_k$ diverge

e. $\displaystyle \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\left(\frac{2k+1}{3k+1}\right)^{\frac{k}{2}}} = \left(\lim_{k \to \infty} \frac{2k+1}{3k+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$

$\Rightarrow \sum u_k$ converge (critère de la racine)

f. $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\dfrac{k^3}{e^k}} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\sqrt[k]{k^3}}{e} = \dfrac{1^3}{e} = \dfrac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ <u>converge</u> (racine)

g. $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{u_{k+1}}{u_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(k+1)\cancel{!}}{2^{k+1}+1} \cdot \dfrac{2^k+1}{\cancel{k!}} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(k+1)\cdot\cancel{2^k}}{2^{\cancel{k+1}}} = +\infty$

$\Rightarrow$ diverge (d'Alembert)

h. $\ln(k) < k \Rightarrow \dfrac{1}{\ln(k)} > \dfrac{1}{k}$. Comme $\sum \dfrac{1}{k}$ diverge, $\sum u_k$ <u>diverge</u>

i.