Séries

Pour les exercices manquants ci-dessous, voir le corrigé du cahier sur le site nymphomath.ch/suites/

Exercice 3.3

pas évident !

En remarquant que $\boxed{\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-1}}$, on peut trouver une formule pour la nième somme partielle de cette série :

$$s_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1}.$$

Comme $\dfrac{1}{n+1} \to 0$ quand $n \to \infty$, la somme de la série vaut 1.

Exercice 3.4

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2} = \frac{1}{5} \neq 0 \Rightarrow$$ d'après le th. 3.1, la série diverge.

Exercice 3.5

D'après le th. 3.2, $0 < \dfrac{1}{k+1} < \dfrac{1}{k}$ et $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, donc la série harmonique alternée converge.

Exercice 3.6

Non, car $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{3k}{4k-1} = \frac{3}{4} \neq 0$.

Exercice 3.7

Oui, car $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k^3+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$ et $\dfrac{(k+1)^2}{(k+1)^3+1} < \dfrac{k^2}{k^3+1}$

Exercice 3.8

Série de Riemann

Oui, car $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge et $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k)}{k^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Exercice 3.9

a. diverge, car $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$.

b. converge, car $\frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} \dots < \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 2$

c. diverge, car $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots = \frac{1}{2}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right)}_{\text{diverge (série harmonique)}}$

d. diverge, car $\frac{1}{11} + \frac{1}{22} + \frac{1}{33} + \dots = \frac{1}{11}\overbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right)}$

e. diverge, car $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}} = \frac{1}{n+1}$

$$\begin{array}{ccccccccc} & \frac{1}{\sqrt{2}} & + & \frac{1}{\sqrt{6}} & + & \frac{1}{\sqrt{12}} & + & \frac{1}{\sqrt{20}} & \Leftarrow \text{diverge} \\ & > & & > & & > & & > & \Uparrow \\ (1+) & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{5} & \Rightarrow \text{Série harmonique} \end{array}$$

f. diverge, car $\frac{2n}{(n+1)(n+2)} \geq \frac{1}{n+2}$ pour $n \geq 1$

$$\frac{2}{2\cdot3} + \frac{4}{3\cdot4} + \frac{6}{4\cdot5} + \frac{8}{5\cdot6} + \frac{10}{6\cdot7} + \dots$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & = & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{3} & + & \frac{3}{10} & + & \frac{4}{15} & + & \frac{5}{21} & + \dots & \nwarrow \\ & & > & & > & & > & & > & & > & & \\ \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} +\right)}_{\text{Série harmonique}} & & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{5} & + & \frac{1}{6} & + & \frac{1}{7} & + \dots & \Rightarrow \text{diverge} \end{array}$$

g. converge, car c'est une série de Riemann avec $\alpha = 2$ et des termes en moins. Donc elle converge, puisque la Série de Riemann converge.

Exercice 3.10

À partir de $n=3$, $\ln(n) > 1$. Donc $\frac{\ln(n)}{n} > \frac{1}{n}$ qui diverge.

Donc $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k}$ diverge.

Exercice 3.11

a. $$c = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{(k+1)!}{10^{k+1}}}{\frac{k!}{10^k}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1)\cancel{!}}{10^{\cancel{k+1}}} \cdot \frac{\cancel{10^k}}{\cancel{k!}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k+1}{10} \right| = \infty > 1$$

$\Rightarrow$ la série diverge

b. $$c = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{k+3}{2^{k+1}}}{\frac{k+2}{2^k}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k+3}{2^{\cancel{k+1}}} \cdot \frac{\cancel{2^k}}{k+2} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k+3}{2\cdot(k+2)} \right| = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ la série converge

c. $$c = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{3^k}{2^{k+1}}}{\frac{3^{k-1}}{2^k}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\cancel{3^k}}{2^{\cancel{k+1}}} \cdot \frac{\cancel{2^k}}{\cancel{3^{k-1}}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{3}{2} \right| = \frac{3}{2} > 1$$

$\Rightarrow$ la série diverge.

d. $$c = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1)\cancel{!}}{\cancel{3\cdot5\cdot7\cdots}(2k+3)} \cdot \frac{\cancel{3\cdot5\cdot7\cdots(2k+1)}}{\cancel{k!}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k+1}{2k+3} \right| = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ la série converge

e. $$c = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{(k+1)^2} \cdot \frac{k^2}{1} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k^2}{(k+1)^2} \right| = 1.$$

$\Rightarrow$ il y a doute

Exercice 3.12

a. $c = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{2^k}} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ converge

b. $c = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{3^k}{180\cdot 2^k}} = \underbrace{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{180}}}_{\to 1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$ diverge

c. $c = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{2k}{3k+1}\right)^k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{2k}{3k+1}\right) = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow$ converge