Séries

Pour les exercices manquants ci-dessous, voir le corrigé du cahier sur le site nymphomath.ch/suites/

Exercice 3.3

pas évident !

En remarquant que $\boxed{\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}}$, on peut trouver une formule pour la nième somme partielle de cette série :

$$s_n = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\frac{1}{n+1} \to 0$ quand $n \to \infty$, la somme de la série vaut 1.

Exercice 3.4

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2} = \frac{1}{5} \neq 0 \Rightarrow$ d'après le th. 3.1, la série diverge.

Exercice 3.5

D'après le th. 3.2, $0 < \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$ et $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, donc la série harmonique alternée converge.

Exercice 3.6

Non, car $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{3k}{4k-1} = \frac{3}{4} \neq 0$.

Exercice 3.7

Oui, car $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k^2}{k^3+1} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$ et $\frac{(k+1)^2}{(k+1)^3+1} < \frac{k^2}{k^3+1}$

Exercice 3.8

Série de Riemann

Oui, car $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge et $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k)}{k^2} < \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$