Séries

Pour les exercices manquants ci-dessous, voir le corrigé du cahier sur le site nymphomath.ch/suites/

Exercice 3.3

pas évident!

En remarquant que $\boxed{\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-1}}$, on peut trouver une formule pour la nième somme partielle de cette série :

$$S_n = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\dfrac{1}{n+1} \to 0$ quand $n \to \infty$, la somme de la série vaut 1.

Exercice 3.4

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2} = \frac{1}{5} \neq 0 \Rightarrow$$ d'après le th. 3.1, la série diverge.

Exercice 3.5

D'après le th. 3.2, $0 < \dfrac{1}{k+1} < \dfrac{1}{k}$ et $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, donc la série harmonique alternée converge.

Exercice 3.6

Non, car $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{3k}{4k-1} = \frac{3}{4} \neq 0$.

Exercice 3.7

Oui, car $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k^3+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$ et $\dfrac{(k+1)^2}{(k+1)^3+1} < \dfrac{k^2}{k^3+1}$

Exercice 3.8

Série de Riemann

Oui, car $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge et $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k)}{k^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Exercice 3.9

a. diverge, car $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$.

b. converge, car $\frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} \dots < \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 2$

c. diverge, car $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots = \frac{1}{2}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right)}_{\text{diverge (série harmonique)}}$

d. diverge, car $\frac{1}{11} + \frac{1}{22} + \frac{1}{33} + \dots = \frac{1}{11}\overbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right)}$

e. diverge, car $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}} = \frac{1}{n+1}$

$$\begin{array}{ccccccccl} & \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}} & + & \boxed{\frac{1}{\sqrt{6}}} & + & \boxed{\frac{1}{\sqrt{12}}} & + & \boxed{\frac{1}{\sqrt{20}}} & \Leftarrow \text{diverge} \\ & > & & > & & > & & > & \qquad \Uparrow \\ (1+) & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{5} & \Rightarrow \text{Série harmonique} \end{array}$$

f. diverge, car $\frac{2n}{(n+1)(n+2)} \geq \frac{1}{n+2}$ pour $n \geq 1$

$$\frac{2}{2\cdot 3} + \frac{4}{3\cdot 4} + \frac{6}{4\cdot 5} + \frac{8}{5\cdot 6} + \frac{10}{6\cdot 7} + \dots$$

$$\begin{array}{cccccccccccl} & = & \boxed{\frac{1}{3}} & + & \boxed{\frac{1}{3}} & + & \boxed{\frac{3}{10}} & + & \boxed{\frac{4}{15}} & + & \boxed{\frac{5}{21}} & + \dots \\ & & > & & > & & > & & > & & > & \\ \left(1 + \frac{1}{2} + \right) & & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{5} & + & \frac{1}{6} & + & \frac{1}{7} & + \dots \Rightarrow \text{diverge} \end{array}$$

Série harmonique

g. converge, car c'est une série de Riemann avec $\alpha = 2$ et des termes en moins. Donc elle converge, puisque la Série de Riemann converge.

Exercice 3.10

À partir de $n = 3$, $\ln(n) > 1$. Donc $\frac{\ln(n)}{n} > \frac{1}{n}$ qui diverge.
Donc $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k}$ diverge.

Exercice 3.11

a. $c = \lim\limits_{k\to\infty} \left| \dfrac{\frac{(k+1)!}{10^{k+1}}}{\frac{k!}{10^k}} \right| = \lim\limits_{k\to\infty} \left| \dfrac{(k+1)\cancel{!}}{10^{k+1}} \cdot \dfrac{\cancel{10^k}}{\cancel{k!}} \right| = \lim\limits_{k\to\infty} \left| \dfrac{k+1}{10} \right| = \infty > 1$

$\Rightarrow$ la série diverge

b. $c = \lim\limits_{k\to\infty} \left| \dfrac{\frac{k+3}{2^{k+1}}}{\frac{k+2}{2^k}} \right| = \lim\limits_{k\to\infty} \left| \dfrac{k+3}{\cancel{2^{k+1}}} \cdot \dfrac{\cancel{2^k}}{k+2} \right| = \lim\limits_{k\to\infty} \left| \dfrac{k+3}{2\cdot(k+2)} \right| = \dfrac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow$ la série converge

c. $c = \lim\limits_{k\to\infty} \left| \dfrac{\frac{3^k}{2^{k+1}}}{\frac{3^{k-1}}{2^k}} \right| = \lim\limits_{k\to\infty} \left| \dfrac{\cancel{3^k}}{\cancel{2^{k+1}}} \cdot \dfrac{\cancel{2^k}}{\cancel{3^{k-1}}} \right| = \lim\limits_{k\to\infty} \left| \dfrac{3}{2} \right| = \dfrac{3}{2} > 1$

$\Rightarrow$ la série diverge.

d. $c = \lim\limits_{k\to\infty} \left| \dfrac{(k+1)\cancel{!}}{\cancel{3\cdot5\cdot7\cdots}(2k+3)} \cdot \dfrac{\cancel{3\cdot5\cdot7\cdots(2k+1)}}{\cancel{k!}} \right| = \lim\limits_{k\to\infty} \left| \dfrac{k+1}{2k+3} \right| = \dfrac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow$ la série converge

e. $c = \lim\limits_{k\to\infty} \left| \dfrac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} \right| = \lim\limits_{k\to\infty} \left| \dfrac{1}{(k+1)^2} \cdot \dfrac{k^2}{1} \right| = \lim\limits_{k\to\infty} \left| \dfrac{k^2}{(k+1)^2} \right| = 1.$

$\Rightarrow$ il y a doute

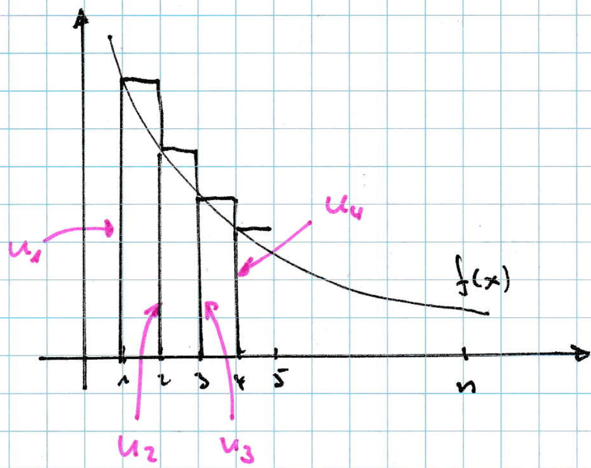
Exercice 3.12

a. $c = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\dfrac{1}{2^k}} = \dfrac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ converge

b. $c = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\dfrac{3^k}{180\cdot 2^k}} = \underbrace{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\dfrac{1}{180}}}_{\to 1} \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2} > 1 \Rightarrow$ diverge

c. $c = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\dfrac{2k}{3k+1}\right)^k} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\dfrac{2k}{3k+1}\right) = \dfrac{2}{3} < 1 \Rightarrow$ converge

Exercice 3.13



$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k > \int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Si l'intégrale diverge, cette limite n'existe pas et la série diverge aussi.

La suite des sommes partielles est croissante puisque les u_k sont positifs. De plus, pour tout n,

$$s_n = u_1 + \sum_{k=2}^{\infty} u_k < u_1 + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Si l'intégrale existe, alors la suite s_n est croissante et bornée. Elle possède donc une limite s.

Exercice 3.14

a. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \underbrace{\left(\sqrt{2t+1}\right)}_{+\infty} - \underbrace{\sqrt{2\cdot 1+1}}_{\sqrt{3}} = +\infty$$

$\Rightarrow$ la série diverge

b. $f(x) = \dfrac{1}{4x^2}$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{4x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} \frac{1}{4x^2}\,dx = \underbrace{\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{4t}\right)}_{\to 0} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ la série converge

c. $f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) dx = \underbrace{\lim_{t \to \infty} \left(\frac{1}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{t}\right)\right)}_{\frac{1}{\pi}} - \underbrace{\frac{1}{\pi} \cos(\pi)}_{-1} = \frac{2}{\pi}$$

$\Rightarrow$ la série converge

d. voir exemples 1 et 2.

Exercice 3.15

a. $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{(k+2)^2-1}}{\frac{1}{(k+1)^2-1}} = \lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{(k+1)^2+1}{(k+2)^2-1} = \lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{k^2}{k^2} = 1 \Rightarrow$ doute (quotient)

$u_k = \dfrac{1}{(k+1)^2-1} = \dfrac{1}{k^2+2k} < \dfrac{1}{k^2}$ $\forall k$. Comme $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, $\sum u_k$ converge aussi

b. $u_k = \dfrac{1}{9k^2-3k-2} < \dfrac{1}{k^2}$ $\forall k$. Comme $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, $\sum u_k$ converge

c. $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{k^2}{2k^2+1} = \dfrac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \sum u_k$ diverge

d. $\lim\limits_{k \to \infty} \left(\dfrac{3k}{3k+1}\right)^k = \lim\limits_{k \to \infty} \left(\dfrac{3k+1-1}{3k+1}\right)^k = \lim\limits_{k \to \infty} \left(1 - \dfrac{1}{3k+1}\right)^k =$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}} = \underbrace{\left(\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^{\frac{1}{3}}}_{e^{\frac{1}{3}}} \cdot \underbrace{\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}}_{1} = e^3 \neq 0$$

$\sum u_k$ diverge

e. $\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{\left(\dfrac{2k+1}{3k+1}\right)^{\frac{k}{2}}} = \left(\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{2k+1}{3k+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} < 1$

$\Rightarrow \sum u_k$ converge (critère de la racine)

f. $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\dfrac{k^3}{e^k}} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\sqrt[k]{k^3}}{e} = \dfrac{1^3}{e} = \dfrac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ converge (racine)

g. $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{(k+1)\cancel{!}}{2^{k+1}+1} \cdot \dfrac{2^k+1}{\cancel{k!}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{(k+1)\cdot \cancel{2^k}}{\cancel{2^{k+1}}}\right| = +\infty$

$\Rightarrow$ diverge (d'Alembert)

h. $\ln(k) < k \Rightarrow \dfrac{1}{\ln(k)} > \dfrac{1}{k}$. Comme $\sum \frac{1}{k}$ diverge, $\sum u_k$ diverge (comparaison)

i. $\sin\left(\dfrac{1}{k^2}\right) < \dfrac{1}{k^2}$. $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, donc $\sum u_k$ converge (comparaison)

j. $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{(k+1)\cancel{!}}{\cancel{10^{k+1}}} \cdot \dfrac{\cancel{10^k}}{\cancel{k!}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{k+1}{10}\right| = \infty > 1$

$\Rightarrow$ diverge (critère de d'Alembert)

k. $\dfrac{k+1}{k\sqrt{3k-2}} = \underbrace{\dfrac{k+1}{k}}_{>1} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3k-2}} > \dfrac{1}{\sqrt{3k-2}} > \dfrac{1}{\sqrt{4k}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{k}} = v_k$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k$ diverge, donc $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ diverge aussi (comparaison)

l. $\ln(k) > 1$ pour $k \geq 3$.

Comme $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ diverge, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\ln(k)}{\sqrt{k}}$ diverge aussi (comparaison)

m. $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{2^{\cancel{k}}}{(k+1)^{k+1}} \cdot \dfrac{k^k}{\cancel{2^{k-1}}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{2\cdot k^k}{(k+1)^{k+1}}\right| =$

$\lim\limits_{k=\infty} \left| 2 \cdot \underbrace{\left(\dfrac{k}{k+1}\right)^k}_{\to \frac{1}{e}} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{k+1}}_{\to 0} \right| = 0 \Rightarrow$ converge (d'Alembert)

n. $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\sqrt[k+1]{10}\right| = 1 \neq 0$ donc $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt[k+1]{10}$ diverge

(théorème 3.1)

o. $$\frac{1}{10k+1} > \frac{1}{10(k+1)} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{k+1}$$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ diverge, donc $\frac{1}{10} \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ diverge aussi,

donc $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10k+1}$ <u>diverge</u> aussi (comparaison)

p. $$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+2)!}{3^{k+3}+7} \cdot \frac{3^{k+2}+7}{\cancel{(k+1)!}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left(\underbrace{k+2}_{\to\infty} \cdot \underbrace{\left|\frac{3^{k+2}+7}{3^{k+3}+7}\right|}_{\to\frac{1}{3}} \right)$$

$$= \infty \Rightarrow \underline{\text{diverge}} \text{ (d'Alembert)}$$

q. $$\frac{1}{\sqrt{k\cdot(k+1)}} > \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+1)}} = \frac{1}{k+1}$$

Comme $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ diverge, $\sum\limits_{k=1} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ <u>diverge</u> (comparaison)

r. $$\frac{\ln(k)}{k^3} < \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}.$$

Comme $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge (série de Riemann),

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k^3}$ converge aussi (comparaison).