Puissances et racines

Ex 4.1.

a. $\frac{3^6}{3^2} = 3^{6-2} = \underline{\underline{3^4}}$

b. $4^2 \cdot 2^5 \cdot 8^2 = (2^2)^2 \cdot 2^5 \cdot (2^3)^2 = 2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^6 = 2^{4+5+6} = \underline{\underline{2^{15}}}$

c. $3^7 \cdot (-3)^7 \cdot \frac{1}{9^2} \cdot \frac{1}{27^2} = 3^7 \cdot \overbrace{(-1)^7}^{=-1} \cdot 3^7 \cdot \frac{1}{(3^2)^2} \cdot \frac{1}{(3^3)^2}$

$= -\frac{3^7 \cdot 3^7}{3^4 \cdot 3^6} = -\frac{3^{14}}{3^{10}} = -3^{14-10} = \underline{\underline{-3^4}}$

d. $5^1 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot 5^{10} = 5^{1+2+3+\ldots+10} = \underline{\underline{5^{55}}}$

e. Piège ! pas de formule... Quel méchant !

Ex 4.2

a. $a^8 \cdot a^{-5} = a^{8-5} = \underline{\underline{a^3}}$

b. $a^{-8} \cdot a^{14} = a^{-8+14} = \underline{\underline{a^6}}$

c. $a^{m-2} \cdot a^{3-m} = a^{m-2+3-m} = \underline{\underline{a}}$

d. $a^{2n-9} \cdot a^{8-n} = \underline{\underline{a^{n-1}}}$

e. $(a^{-2})^3 = a^{-2\cdot 3} = \underline{\underline{a^{-6}}}$

f. $(a^3)^{-2} = a^{3\cdot(-2)} = \underline{\underline{a^{-6}}}$

g. $(2^{-3})^0 = \underline{\underline{1}}$

h. $(2^0)^{-3} = 1^{-3} = \frac{1}{1^3} = \underline{\underline{1}}$

i. $(a^{-5})^{-n} = a^{(-5)\cdot(-n)} = \underline{\underline{a^{5n}}}$

Ex 4.3

a. $(3^{x-1})^3 = 9 \cdot 3^{x-2}$

il faut qqch du genre $3^{\text{machin}} = 3^{\text{bidule}}$

$\Rightarrow$ machin = bidule

$3^{3x-3} = 3^2 \cdot 3^{x-2}$

$3^{3x-3} = 3^{2+x-2}$

machin

$3^{3x-3} = 3^{x}$

bidule

et là, on peut enlever les 3... (voir propriété 6)

$3x - 3 = x$

$2x = 3$

$\Rightarrow x = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$

b. $27^{x+2} = 3^{5x+8}$

$\left(3^3\right)^{x+2} = 3^{5x+8}$

$\boxed{3}^{3x+6} = \boxed{3}^{5x+8}$ même base

$3x+6 = 5x+8$

$-2 = 2x$

$x = \underline{\underline{-1}}$

c. $9^x \cdot 2^{2x} = 216^{-1}$

$3^{2x} \cdot 2^{2x} = 216^{-1}$

$6^{2x} = \left(6^3\right)^{-1}$

$\boxed{6}^{2x} = \boxed{6}^{-3}$ ici, la base est 6.

$2x = -3$

$x = \underline{\underline{-\frac{3}{2}}}$

Ex 4.4

a. $(x-2)^3$: même dessin que x^3, mais décalé de 2 (vers la droite)

b. x^4+1 : " " " x^4, " " de 1 vers le haut.

c. $-x^3$: symétrie d'axe horizontal avec x^3.

voir les dessins sur le corrigé, ou utiliser DESMOS.

Ex 4.5

a. $1101001_2 = 2^6+2^5+2^3+2^0 = 64+32+8+1 = \underline{\underline{105}}$

b. $6432_8 = 6\cdot 8^3 + 4\cdot 8^2 + 3\cdot 8^1 + 2\cdot 8^0 = \underline{\underline{3354}}$

c. $AF2_{16} = 10\cdot 16^2 + 15\cdot 16^1 + 2\cdot 16^0 = \underline{\underline{2802}}$

d. $34221_6 = 3\cdot 6^4 + 4\cdot 6^3 + 2\cdot 6^2 + 2\cdot 6^1 + 1\cdot 6^0 = \underline{\underline{4837}}$

e. $111A_{12} = 1\cdot 12^3 + 1\cdot 12^2 + 1\cdot 12^1 + 10\cdot 12^0 = \underline{\underline{1894}}$

f. faux! en base 11, les symboles vont de 0 à A. D est impossible.

11 symboles

13

10

Ex 4.6

a.

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	0	1	0	0	0	1

$128 + 16 + 1 = 145$

~~64~~ ~~32~~ ~~8~~ ~~4~~ ~~2~~

145 : 2 = 72	reste	1	
72 : 2 = 36	"	0	
36 : 2 = 18	"	0	
18 : 2 = 9	"	0	
9 : 2 = 4	"	1	
4 : 2 = 2	"	0	
2 : 2 = 1	"	0	
1 : 2 = 0	"	1	

à lire de bas en haut

10010001

b. $5^3 \quad 5^2 \quad 5^1 \quad 5^0$

$\boxed{1 \quad 0 \quad 4 \quad 0}$

$125 + 20 = 145$

145 : 5 = 29	reste	0	
29 : 5 = 5	"	4	
5 : 5 = 1	"	0	1040
1 : 5 = 0	"	1	

c. $16^2 \quad 16^1 \quad 16^0$

$3 \quad 14 \quad 12 \Rightarrow \boxed{3EC}$

$768 + 224 + 12 = 1004$

1004 : 16 = 62	reste	12 = C	
62 : 16 = 3	reste	14 = E	3EC
3 : 16 = 0	reste	3 = 3	

d. $16^1 \quad 16^0$

$15 \quad 15 \Rightarrow \boxed{FF}$

$240 + 15 = 255$

255 : 16 = 15	reste	15 = F	FF
15 : 16 = 0	"	15 = F	

e. $14^3 \quad 14^2 \quad 14^1 \quad 14^0$

$2 \quad 5 \quad 3 \quad 12 \Rightarrow \boxed{253C}$

$\underbrace{\underbrace{5488 + 980}_{6468} + 42}_{6510} + 12 = 6522$

6522 : 14 = 465	reste	12 = C	
465 : 14 = 33	"	3 = 3	253C
33 : 14 = 2	"	5 = 5	
2 : 14 = 0	"	2 = 2	

f. $9^4 \quad 9^3 \quad 9^2 \quad 9^1 \quad 9^0$

$\boxed{1 \quad 2 \quad 3 \quad 6 \quad 4}$

$\underbrace{\underbrace{\underbrace{6561 + 1458}_{8019} + 243}_{8262} + 54}_{8316} + 4 = 8320$

8320 : 9 = 924	reste	4	
924 : 9 = 102	"	6	
102 : 9 = 11	"	3	12364
11 : 9 = 1	"	2	
1 : 9 = 0	"	1	

cette méthode est beaucoup plus pratique et rapide !

Ex 4.7

a. $\sqrt{0} = 0$ b. $\sqrt{625} = 25$ c. et d. $\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}$

e. $\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$ car $0{,}2^2 = 0{,}04$ f. $\sqrt{-16}$ n'existe pas (dans $\mathbb{R}$)

Ex 4.8

a. $\sqrt[3]{1000} = 10$ b. $\sqrt[4]{625} = \sqrt{\sqrt{625}} = \sqrt{25} = 5$ c. $\sqrt[3]{0{,}001} = 0{,}1$

d. $\sqrt[5]{-32} = -2$ car $(-2)^5 = -32$ e. $\sqrt[4]{-16} = \sqrt{\sqrt{-16}}$ n'existe pas

Ex 4.9

a. $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{4} \cdot \underbrace{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}_{=3} = 2 \cdot 3 = 6$

b. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = 2$

c. $\sqrt{5^4} = 5^2 = 25$

d. $\sqrt[\cancel{2 \cdot 10}\,2]{2^{\cancel{5}}} = \sqrt{2}$ (rappel : on écrit $\sqrt{2}$ plutôt que $\sqrt[2]{2}$)

e. $\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$

f. $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{2}$

g. l'idée est de n'avoir plus qu'un seul radical ($\sqrt{\ }$) :

commençons par calculer $a \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2 \cdot a} = \sqrt{a^3}$

puis : $\sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt{a}$

puis : $a\sqrt{a} = \sqrt{a^3}$

enfin : $\sqrt{\sqrt{a^3}} = \sqrt[4]{a^3}$

on calcule petit à petit de droite à gauche...

Ex 4.10 : utiliser DESMOS ← j'adore !

a. comme $\sqrt{x}$ décalé de 2 vers la droite

b. " " " " 1 vers le bas

c. symétrie d'axe horizontal de $\sqrt[3]{x}$

⚠ ($\sqrt[3]{-x}$ serait une symétrie d'axe vertical et le dessin serait le même pour cette fonction).

Ex 4.11

Utiliser DESMOS ($y=L$ et $x=M$)

Ex 4.12

a. $\sqrt{24} = \sqrt{4\cdot 6} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

b. $\sqrt{243} = \sqrt{3\cdot 81} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{81} = 9\sqrt{3}$

c. $\sqrt{300} = \sqrt{3\cdot 100} = 10\cdot\sqrt{3}$

d. $\sqrt{125} = \sqrt{5\cdot 25} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{25} = 5\cdot\sqrt{5}$

e. $\sqrt{147} = \sqrt{3\cdot 49} = \sqrt{3}\sqrt{49} = 7\cdot\sqrt{3}$

f. $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2\cdot 27} = \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{27} = 3\sqrt[3]{2}$

g. $\sqrt{80} = \sqrt{5\cdot 16} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{16} = 4\cdot\sqrt{5}$

h. il ne faut que des $\sqrt{5}$: $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

$$\Rightarrow 3\sqrt{5} \underbrace{-4\cdot 2}_{-8}\cdot\sqrt{5} + \underbrace{5\cdot 3}_{15}\cdot\sqrt{5} \underbrace{-3\cdot 4}_{-12}\cdot\sqrt{5} = -2\sqrt{5}$$

i. comme le h. avec des $\sqrt{10}$: $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$, $\sqrt{90} = 3\sqrt{10}$, $\sqrt{4000} = 20\sqrt{10}$

$$\Rightarrow \underbrace{2\cdot 2}_{4}\sqrt{10} \underbrace{-2\cdot 3}_{-6}\sqrt{10} + 20\sqrt{10} - 5\sqrt{10} = 13\sqrt{10}$$

Ex 4.13

a. $(3-\sqrt{3})(1-2\sqrt{3}) = 3 - 6\sqrt{3} - \sqrt{3} + 2\cdot\sqrt{3}\sqrt{3} = 9 - 7\sqrt{3}$

b. $(4-\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = 12 - 8\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2\cdot\sqrt{2}\sqrt{2} = 16 - 11\sqrt{2}$

c. $(2\sqrt{3}-1)^2 = (2\cdot\sqrt{3})^2 - 2\cdot 2\sqrt{3} + 1 = 13 - 4\sqrt{3}$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

une baffe si vous l'avez oublié !

d. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

on ne le met pas...

Ex 4.14

a. $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$ b. $3^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{3^5}$ c. $36^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{36^3} = \left(\sqrt{36}\right)^3 = 6^3$

d. $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$ e. $7^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{7^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{7}}$

f. $3^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{3^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{3^5}}$

Ex 4.15

a. $\sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}$ b. $\sqrt[11]{5^6} = 5^{\frac{6}{11}}$ c. $-\sqrt[4]{a^8} = -a^{\frac{8}{4}} = -a^2 \neq (-a)^2$

d. $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{-\frac{1}{2}}$ e. $-\frac{1}{\sqrt[5]{6}} = -\frac{1}{6^{\frac{1}{5}}} = -6^{-\frac{1}{5}}$

ne pas confondre le rôle des deux "−"

f. $\frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2^1}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{1-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$

⚠ Les exercices 4.14 et 4.15 sont très importants pour la suite.

Ex 4.16

cm!

a. $S = 0{,}007 \cdot 79^{0{,}425} \cdot 183^{0{,}725} \cong 1{,}96\ m^2$

b. Si m augmente de 10%, alors m devient $1{,}1 \cdot m$ (rappel pourcentage)

$\Rightarrow S' = 0{,}007 \cdot (1{,}1\, m)^{0{,}425} \cdot h^{0{,}725}$

$= 0{,}007 \cdot 1{,}1^{0{,}425} \cdot m^{0{,}425} \cdot h^{0{,}725}$ $= S$

$\Rightarrow S' = \underset{1{,}1^{0{,}425}}{\underbrace{1{,}041}} \cdot S$. S a donc augmenté de 4,1%.