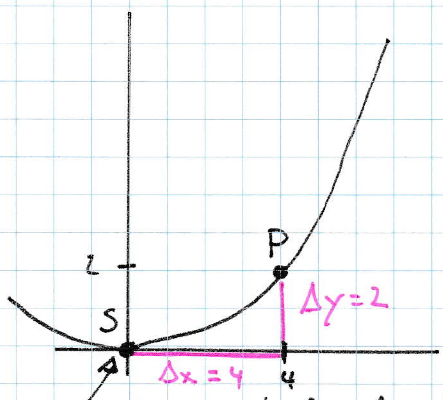
Fonctions quadratiques (paraboles)

Méthode pour trouver a dans les exercices 3.1 à 3.4.

1. Prendre le sommet de la parabole et un point se trouvant sur le quadrillage.
2. Mesurer Δx et Δy (voir dessin)
3. Résoudre $\Delta y = a \cdot (\Delta x)^2$

   Ici $2 = a \cdot 4^2 \Rightarrow a = \frac{1}{8}$



sommet (point le plus bas ou le plus haut)

Exercice 3.1

1. $S(0;0)$, $P(2;1)$. $\Delta x = 2$, $\Delta y = 1 \Rightarrow 1 = a \cdot 2^2 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{4}$
2. $S(0;0)$, $P(1;1)$. $\Delta x = 1$, $\Delta y = 1 \Rightarrow 1 = a \cdot 1^2 \Rightarrow a_2 = 1$
3. $S(0;0)$, $P(1;3)$. $\Delta x = 1$, $\Delta y = 3 \Rightarrow 3 = a \cdot 1^2 \Rightarrow a_3 = 3$
4. $S(0;0)$, $P(4;-4)$. $\Delta x = 4$, $\Delta x = -4 \Rightarrow -4 = a \cdot 4^2 \Rightarrow a_4 = -\frac{1}{4}$
5. $S(0;0)$, $P(2;-4)$. $\Delta x = 2$, $\Delta y = -4 \Rightarrow -4 = a \cdot 2^2 \Rightarrow a_5 = -1$
6. $S(0;0)$, $P(1;-3)$. $\Delta x = 1$, $\Delta y = -3 \Rightarrow -3 = a \cdot 1^2 \Rightarrow a = -3$

Constatations

parabole ouverte en haut

- $a > 0 \Leftrightarrow \cup$, $a < 0 \Leftrightarrow \cap$ (ouverte en bas)
- si $|a|$ est grand, la parabole est "étroite": $\cup$ ou $\cap$
- si $|a|$ est petit, la parabole est "évasée". $\smile$ ou $\frown$
- toutes les paraboles du type $y = ax^2$ passe par l'origine.

Exercice 3.2.

Par rapport à l'ex 3.1, on voit que q décale verticalement la parabole. On a que $f(0) = q$. Le sommet est en $(0;q)$.

1. $S(0;-3)$, $P(1;-2)$. $\Delta x = 1$ $\Delta y = 1$ $\Rightarrow$ $1 = a\cdot 1^2 \Rightarrow a_1 = 1$ et $\underset{f(0)\downarrow}{q_1 = -3}$
2. $S(0;-4)$, $P(4;0)$. $\Delta x = 4$, $\Delta y = 4$ $\Rightarrow$ $4 = a\cdot 4^2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{4}$ et $q_2 = -4$
3. $S(0;3)$, $P(1;2)$. $\Delta x = 1$, $\Delta y = -1$ $\Rightarrow$ $-1 = a\cdot 1^2 \Rightarrow a_3 = -1$ et $q_3 = 3$
4. $S(0;-1)$, $P(1;-3)$. $\Delta x = 1$, $\Delta y = -2$ $\Rightarrow$ $-2 = a\cdot 1^2 \Rightarrow a_4 = -2$ et $q_4 = -1$

Exercice 3.3

Par rapport à l'ex 3.1, on voit que p décale horizontalement la parabole. On a que $f(p) = 0$. Le sommet est en $(p;0)$.

1. $S(3;0)$, $P(1;4)$. $\Delta x = -2$, $\Delta y = 4$ $\Rightarrow$ $4 = a\cdot(-2)^2 \Rightarrow a_1 = 1$ et $p_1 = 3$.
2. $S(-4;0)$, $P(0;4)$. $\Delta x = 4$, $\Delta y = 4$ $\Rightarrow$ $4 = a\cdot 4^2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{4}$ et $p_2 = -4$.
3. $S(-3;0)$, $P(-1;-4)$ $\Delta x = 2$, $\Delta y = -4$ $\Rightarrow -4 = a\cdot 2^2 \Rightarrow a_3 = -1$ et $p_3 = -3$
4. $S(1;0)$, $P(2;-2)$ $\Delta x = 1$, $\Delta y = -2$ $\Rightarrow -2 = a\cdot 1^2 \Rightarrow a_4 = -2$ et $p_4 = 1$

Exercice 3.4

D'après les ex 3.2 et 3.3, on constate que le sommet est $S(p,q)$.

Donc. 1. $f(x) = \underset{a_1}{1}\cdot(x - \underset{p_1}{3})^2 \underset{q_1}{-1} = x^2 - 6x + 9 - 1 = x^2 - 6x + 8$

en développant — en simplifiant

2. $f(x) = \frac{1}{3}(x - (-4))^2 + 1 = \frac{1}{3}(x^2 + 8x + 16) + 1 = \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{19}{3}$

3. $f(x) = -1\cdot(x - (-3))^2 - 3 = -(x^2 + 6x + 9) - 3 = -x^2 - 6x - 12$

4. $f(x) = \underset{a_4}{-2}(x - \underset{p_4}{2})^2 \underset{q_4}{+2} = -2(x^2 - 4x + 4) + 2 = -2x^2 + 8x - 6$

Exercice 3.5

Les points doivent tous satisfaire l'équation de la parabole :

A : $1 = a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + c \Rightarrow 4a - 2b + c = 1$ (1)

B : $-4 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c \Rightarrow a + b + c = -4$ (2)

C : $6 = a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c \Rightarrow 9a + 3b + c = 6$ (3)

(1) − (2) : $3a - 3b = 15 \Rightarrow a - b = 5$ (4)

(3) − (2) : $8a + 2b = 10 \Rightarrow 4a + b = 5$ (5)

(4) + (5) : $5a = 10 \Rightarrow a = 2$

(4) $\Rightarrow b = -3$

(2) $\Rightarrow 2 - 3 + c = -4 \Rightarrow c = -3$

$\Rightarrow f(x) = 2x^2 - 3x - 3$

Exercice 3.6*

On a vu à l'ex. 3.3 que p est l'abscisse du sommet. Il faut donc exprimer p en fonction de a et b.

Développons
$$f(x) = a(x-p)^2 + q$$
$$f(x) = a(x^2 - 2px + p^2) + q$$
$$f(x) = \underbrace{a}_{a}x^2 \underbrace{-2ap}_{b}x + \underbrace{ap^2 + q}_{c}$$

Identifions de $f(x) = ax^2 + bx + c$.

On voit que $b = -2ap \Rightarrow p = -\frac{b}{2a} = x_S$

abscisse du sommet

Exercice 3.7

Même idée que l'ex 3.5, en utilisant en plus $x_S = -\frac{b}{2a}$

A : $\frac{3}{2} = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c \Rightarrow 2a + 2b + 2c = 3$ (1)

S : $1 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c \Rightarrow 4a + 2b + c = 1$ (2)

S : $2 = -\frac{b}{2a} \Rightarrow 4a + b = 0$ (3)

$① - 2 \cdot ② : -6a - 2b = 1 \quad ④$

$③ : 4a + b = 0 \quad ③$

$2 \cdot ③ + 4 : 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

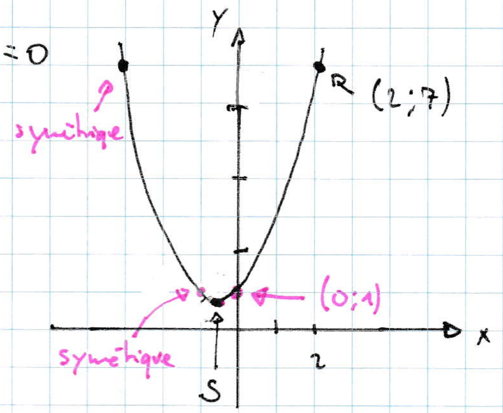
$③ \Rightarrow b = -2$

$② \Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot (-2) + c = 1 \Rightarrow c = 3$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$$

Exercice 3.8

Pour trouver les zéros, résoudre $f(x) = 0$



a. $x^2 + x + 1 = 0$

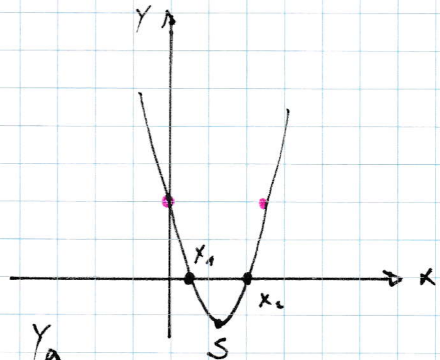
$\Delta = 1 - 4 < 0$: pas de zéro

$x_s = \frac{-1}{2} \quad y_s = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{3}{4}$

b. $2x^2 - 5x + 2 = 0$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

$x_s = \frac{5}{4} \quad y_s = 2\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{4} + 2 = -\frac{9}{8}$

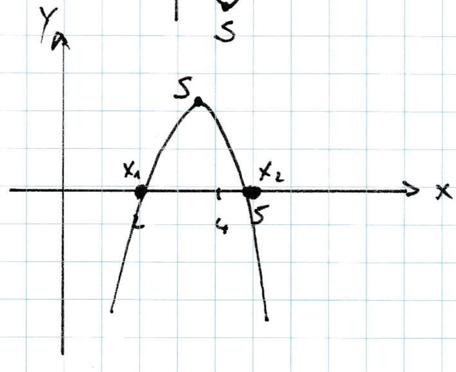


c. $(x-2)(5-x) = 0 \Rightarrow$ zéros : 2 et 5

pas besoin de développer...

x_s : milieu de 2 et 5 $= \frac{7}{2}$

$y_s = \left(\frac{7}{2} - 2\right)\left(5 - \frac{7}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$

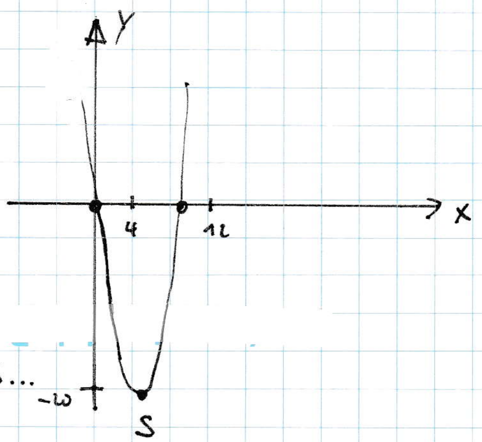


d. $x^2 - 9x = x(x-9) \Rightarrow$ zéros : 0 et 9

pas besoin de développer

$x_s = \frac{9}{2}$ (milieu de 0 et 9)

$y_s = \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 9 \cdot \frac{9}{2} = -\frac{81}{4} = -20{,}5$



P.S. Les dessins sont plus jolis avec DESMOS...

Exercice 3.9

Résoudre $f(x) = g(x)$ (cela marche avec toutes les fonctions)

a. $x^2 + 3x + 1 = -3x^2 + x + 2$

$4x^2 + 2x - 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{8} \begin{cases} \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} = 0{,}309017 \\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} = -0{,}809017 \end{cases}$$

b. $x^2 + 3x - 1 = x + 2$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$

vérifiez ces résultats en dessinant les courbes avec DESMOS.

Exercice 3.10

La droite cherchée a pour équation $y = -x + h$ (parallèle à $y = -x$)
Si la droite est tangente à la parabole, cela signifie qu'il n'y a qu'un point d'intersection, donc une seule solution à l'équation $-x + h = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$. Pour cela, il faut que $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.

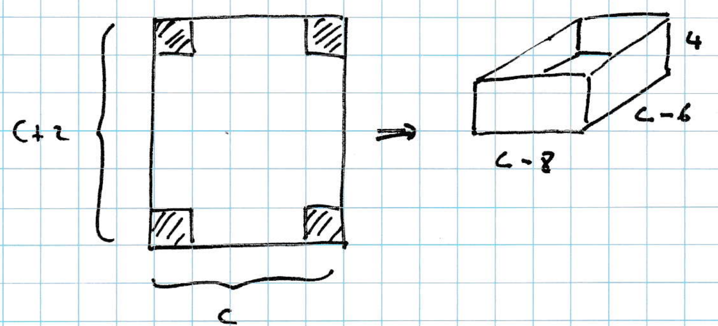
$$\underbrace{-\frac{1}{2}}_{a}x^2 + \underbrace{2}_{b}x + \underbrace{\frac{3}{2} - h}_{c} = 0 \Rightarrow \Delta = 4 + 2\left(\frac{3}{2} - h\right) = 7 - 2h = 0$$

$$\Rightarrow h = \frac{7}{2}$$

La réponse est donc $y = -x + \frac{7}{2}$.

utilisez DESMOS pour vérifier.

Exercice 3.11



$V = 4(c-8)(c-6) = 672$

$c^2 - 14c + 48 = 168$

$c^2 - 14c - 120 = 0$

$$c = \frac{14 \pm \sqrt{196 + 480}}{2} \begin{cases} \underline{20} \\ \cancel{-6} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Dimensions de la feuille : $\underline{\underline{22 \times 20 \text{ cm}}}$

Exercice 3.12

$h(t) = 128t - 16t^2$ ← dessiner avec DESMOS

a. Il faut trouver le sommet : $t_s = \dfrac{-128}{-32} = 4$ (secondes)

b. Calculer $h(4) = 128 \cdot 4 - 16 \cdot 4^2 = 256$ (mètres)

c. Résoudre $h(t) = 0$: $128t - 16t^2 = 0$

$16t(8-t) = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \quad t_2 = \underline{\underline{8}}$ (secondes) "à nouveau"

d. Résoudre $h(t) = 192$: $128t - 16t^2 = 192$

$-t^2 + 8t - 12 = 0$

$t^2 - 8t + 12 = 0$

$(t-2)(t-6) = 0 \Rightarrow t_1 = 2$ et $t_2 = 6$

en montant — en descendant

Exercice 3.13

Soit t_{ch} le temps que dure la chute du caillou

Soit t_s " " met le bruit de l'impact à parvenir vers nous.

On a $t_{ch} + t_s = 4. \Rightarrow t_s = 4 - t_{ch}$

De plus, on a 2 manière de calculer la hauteur h de la falaise :

$h = 4{,}9 \cdot t_{ch}^2$ et $h = 330 \cdot t_s$. D'où $4{,}9\, t_{ch}^2 = 330\, t_s$.

Donc, on a $4{,}9\, t_{ch}^2 = 330(4 - t_{ch})$

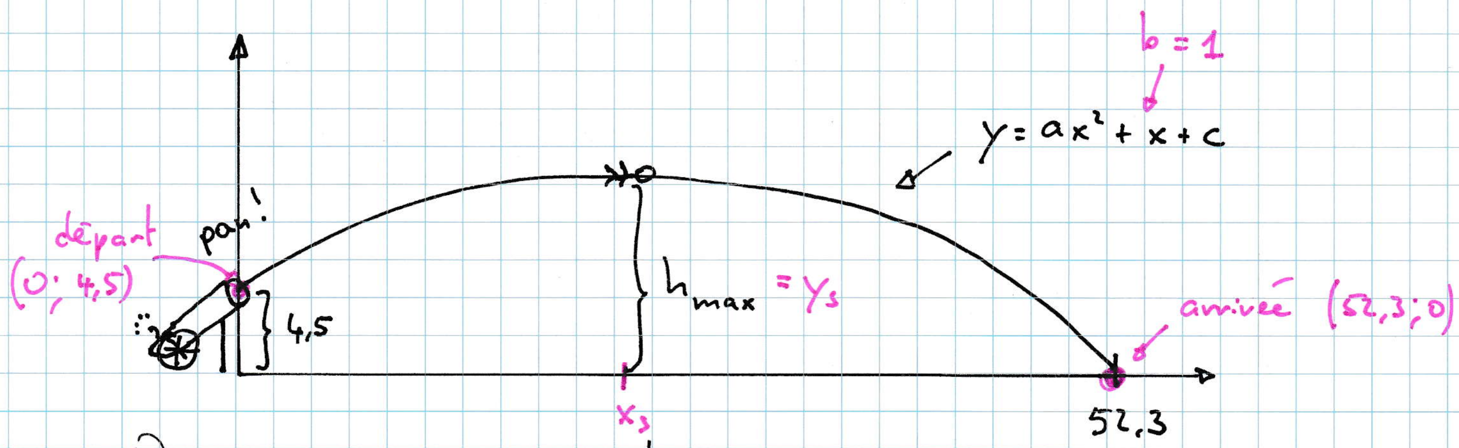
$$4{,}9\, t_{ch}^2 + 330\, t_{ch} - 1320 = 0$$

$$t_{ch} = \frac{-330 \pm \sqrt{330^2 + 4 \cdot 4{,}9 \cdot 1320}}{2 \cdot 4{,}9} \begin{cases} 3{,}787 \\ < 0 \text{ osef} \end{cases}$$

on s'en fout...

$\Rightarrow h = 4{,}9 \cdot 3{,}787^2 = \underline{\underline{70{,}27 \text{ m}}}$

Exercice 3.14



a. On a 2 inconnues : a et c.

On connait 2 points de la parabole : départ et arrivée.

On peut donc poser 2 équations :

départ : $4{,}5 = a \cdot 0^2 + 0 + c \Rightarrow c = 4{,}5$

arrivée : $0 = a \cdot 52{,}3^2 + 52{,}3 + c \Rightarrow a = \dfrac{-56{,}8}{52{,}3^2} = -0{,}02076$

$\Rightarrow$ équation du vol : $\underline{\underline{y = -0{,}02076\,x^2 + x + 4{,}5}}$

b. Il faut trouver le sommet de la parabole :

$$x_s = -\frac{b}{2a} = \frac{-1}{-2 \cdot 0{,}02076} = 24{,}078$$

$$\Rightarrow h_{max} = y_s = -0{,}02076 \cdot 24{,}078^2 + 24{,}078 + 4{,}5 = \underline{\underline{16{,}54 \text{ m}}}$$

Exercice 3.15

Même idée que pour l'ex 3.14, mais cette fois il y a 3 inconnues. Il faut donc 3 équations.

Départ $(0;0) \Rightarrow 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 0$ trop facile !

Arrivée $(2{,}7;0) \Rightarrow 0 = a \cdot 2{,}7^2 + b \cdot 2{,}7 + c$ (1)

Sommet $(1{,}35;0{,}9) \Rightarrow 0{,}9 = a \cdot 1{,}35^2 + b \cdot 1{,}35 + c$ (2)

par symétrie de la parabole

Donc $7{,}29a + 2{,}7b = 0$ (1)

$1{,}8225a + 1{,}35b = 0{,}9$ (2)

① − 2·② : $3{,}645\,a = -1{,}8 \Rightarrow a = -0{,}4938$

① $\Rightarrow\ b = \dfrac{-7{,}29\cdot(-0{,}4938)}{2{,}7} = \dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow$ équation de la trajectoire : $y = -0{,}4938\,x^2 + \dfrac{4}{3}x$

Exercice 3.16

Il faut traduire en équations le texte :

chemin de réaction $= \dfrac{3}{10}\cdot v$

chemin de freinage $= \left(\dfrac{v}{10}\right)^2 = \dfrac{v^2}{100}$ (sur route mouillée)

chemin de freinage $= \dfrac{3}{4}\cdot\left(\dfrac{v}{10}\right)^2 = \dfrac{3v^2}{400}$ (sur route sèche)

Donc : a. $d = \dfrac{3}{10}v + \dfrac{v^2}{100}$

b. $d = \dfrac{3}{10}v + \dfrac{3v^2}{400}$

plus clair et plus court que le texte, non ?

Exercice 3.17

recette = nbr de spectateurs × prix d'entrée

$y = (14000 - 280x)(7 + 0{,}25x)$

x : nbr de quarters ajoutés au prix de départ (7)

$y = -70x^2 + 1540x + 98'000$

Il faut trouver le sommet de cette parabole, qui est ouverte vers le bas.

$x_s = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-1540}{-140} = 11$. Le prix d'entrée optimal est donc

$7 + 11\cdot 0{,}25 = 9{,}75$ dollars

Exercice 3.18

Même idée que l'exercice 3.17. Il faudra trouver le sommet d'une parabole.

On a comme contrainte : $2x + y = 6$ (longueur de la clôture)

L'aire sera : $A = x \cdot y = x(6-2x) = -2x^2 + 6x$

$$x_s = -\frac{b}{2a} = \frac{-6}{-4} = \underline{\underline{\frac{3}{2}\ m}} \quad \text{et} \quad y = 6 - 2 \cdot \frac{3}{2} = \underline{\underline{3\ m}}$$

L'aire maximale sera de $4{,}5\ m^2$.

Exercice 3.19

a. On connait deux points de la droite : $(-6;36)$ et $(8;64)$

Donc : $36 = m \cdot (-6) + h$ ①

$64 = m \cdot 8 + h$ ②

② − ① : $28 = 14m \Rightarrow m = 2$

② $\Rightarrow 64 = 2 \cdot 8 + h \Rightarrow h = 48$

$\underline{\underline{g(x) = 2x + 48}}$

b. $g(0) = 48$ ✓ c'est tout !

c. Comme la partie a, mais avec des lettres...

Donc : $a^2 = m \cdot (-a) + h$ ①

$b^2 = m \cdot b + h$ ②

② − ① : $b^2 - a^2 = mb + ma = m(b+a)$

$$\Rightarrow m = \frac{b^2 - a^2}{b+a} = \frac{(b-a)\cancel{(b+a)}}{\cancel{b+a}} = b - a$$

② $\Rightarrow h = b^2 - m \cdot b = b^2 - (b-a) \cdot b = b^2 - b^2 + ab = ab$

ordonnée à l'origine $=$ produit de a et b

ça marche !