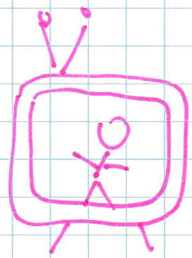
6. Logarithmes et exponentielles

Préambule



$x + 4 = 7 \Rightarrow x = 7 - 4 = 3$

$x \cdot 4 = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{4} = 3$

$x^4 = 81 \Rightarrow x = \sqrt[4]{81} = 3$

$3^x = 81 \Rightarrow x = \log_3(81) = 4$

Exercice 6.1 (Réviser d'abord le chapitre 4)

a. $\log(1) = 0$ car $10^0 = 1$

b. $\log(10^7) = 7$ car $10^7 = 10^7$

c. $\log\left(\frac{1}{10}\right) = -1$ car $10^{-1} = \frac{1}{10}$

d. $\log\left(\frac{1}{\sqrt[4]{10}}\right) = -\frac{1}{4}$ car $10^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{10}}$

e. $\log(\sqrt[3]{100}) = \log(\sqrt[3]{10^2}) = \frac{2}{3}$, car $10^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{10^2}$

f. $\log(-10)$ n'existe pas

g. $\log(x)$ quand $x \to 0$, $x > 0 \Rightarrow \log(x) \to -\infty$

Exercice 6.2

a. $\log_2(8) = 3$, car $2^3 = 8$

b. $\log_2(64) = 6$, car $2^6 = 64$

c. $\log_3(729) = 6$, car $3^6 = 729$

d. $\log_9(729) = 3$, car $9^3 = 729$

e. $\log_3(\sqrt[4]{\underbrace{27}_{3^3}}) = \frac{3}{4}$, car $3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3^3}$

f. $\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2$, car $2^{-2} = \frac{1}{4}$

g. $\log_3\left(\frac{1}{81}\right) = -4$, car $3^{-4} = \frac{1}{81}$

h. $\log_2\left(\frac{1}{128}\right) = -7$, car $2^{-7} = \frac{1}{128}$

i. $\log_{16}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, car $16^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

j. $\log_9\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, car $9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

Exercice 6.3

a. $x = 5$, car $2^5 = 32$

b. $\log_4(4^3) = \log_4(64) = 3 \Rightarrow x = 64$

c. $\log_x(125) = 3 \Rightarrow x^3 = 125 \Rightarrow x = 5$

Exercice 6.4

a. $\log(9) \cong 0{,}954$

b. $10^{0{,}9} \cong 7{,}94$

$10^{0{,}95} = 8{,}91$

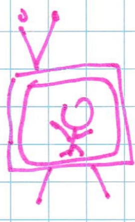
$10^{0{,}96} = 9{,}12$

$10^{0{,}955} = 9{,}01$

$10^{0{,}954} \cong 8{,}995$ $\Rightarrow$ réponse à 3 décimales : $0{,}954$

$10^{0{,}9545} = 9{,}005$ ← on continue pour le fun...

$10^{0{,}9542} = 8{,}999$ etc.



c. On laisse tomber... Boum!

Exercice 6.5

a. $\log(1270) \cong 3{,}104$
-1
$\log(127) \cong 2{,}104$
-1
$\log(12{,}7) = 1{,}104$

$\log(1{,}27) = 0{,}104$
-1
$\log(0{,}127) = -0{,}896$

$\log(0{,}0127) = -1{,}896$

b. $\log\left(\frac{x}{10}\right) = \log(x) - 1$

c. c'est la propriété 5a, avec $v = 10$. Or $\log(10) = 1$. Donc on retrouve la formule du point b.

Exercice 6.6

a. $\log(a^2b^3) = \log(a^2) + \log(b^3) = 2\log(a) + 3\log(b)$

b. $\log\left(\frac{a^3}{b^2}\right) = \log(a^3) - \log(b^2) = 3\log(a) - 2\log(b)$

c. $\log(a) + \log(\underset{d^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{d}}) - \log(c) - \log(\underset{b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{b}}) = \log(a) - \frac{1}{3}\log(b) - \log(c) + \frac{1}{2}\log(d)$

Exercice 6.7

a. $\ln(e) = 1$, car $e^1 = e$

b. $\ln(1) = 0$, car $e^0 = 1$

c. $\ln(e^7) = 7$

d. $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$, car $e^{-1} = \frac{1}{e}$

e. $\ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$, car $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

f. $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2}$, car $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

(même principe que les ex 6.1 et 6.2, mais dans la base e)

Exercice 6.8

Méthode : utiliser les propriétés du § 6.3 pour se ramener à une équation du type $\log_b(\text{machin}) = \log_b(\text{truc})$. On pourra ensuite supprimer les $\log_b$ et résoudre avec des méthodes vues en début d'année.

a. $\log(x+1) - \log(3) = \log(2x-3) + \log(7)$

pr. 5a $\log\left(\frac{x+1}{3}\right) = \log(7\cdot(2x-3))$ pr 4 a.

On peut supprimer les log, car ils sont les deux dans la même base et on bien $\log(\text{machin}) = \log(\text{truc})$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{3} = 14x - 21$$

$$x + 1 = 42x - 63$$

$$41x = 64 \quad \Rightarrow x = \frac{64}{41}$$

⚠ Il faut vérifier dans l'équation de départ que la solution est correcte. Il peut arriver que la solution trouvée soit une solution fantôme. On a déjà vu ce phénomène avec les équations irrationnelles.

$$\log\left(\frac{64}{41}+1\right) - \log(3) \stackrel{?}{=} \log\left(2\cdot\frac{64}{41} - 3\right) + \log(7)$$

$$0{,}4084 - 0{,}4771 = -0{,}9138 + 0{,}845 \quad ✓$$

b. $\log_3(2x-5) + \log_3(3x+7) = 4\log_3(2)$

pr. 4a

$$\log_3((2x-5)(3x+7)) = \log_3(2^4)$$ pr 6a

$$(2x-5)(3x+7) = 16$$

$$6x^2 - x - 35 = 16$$

$$6x^2 - x - 51 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24\cdot 51}}{12} \quad \begin{cases} \underline{\underline{3}} \\ \cancel{-2{,}83} \end{cases}$$

on voit tout de suite que ça ne marche pas. On aurait le log d'un nombre négatif, ce qui est impossible.

<u>Vérification pour $x = 3$</u> :

$$\underbrace{\log_3(1)}_{0} + \log_3(16) \overset{?}{=} 4\cdot\log_3(2)$$

$$\log_3(16) = \log_3(2^4) \quad ✓$$

c. $\ln(x^2-7) = 2\ln(x+3)$

$$\ln(x^2-7) = \ln((x+3)^2)$$

$$\cancel{x^2} - 7 = \cancel{x^2} + 6x + 9$$

$$-16 = 6x$$

$$x = \underline{\underline{-\frac{8}{3}}}$$

<u>Vérification</u>

$$\ln\left(\left(-\frac{8}{3}\right)^2 - 7\right) \overset{?}{=} 2\ln\left(-\frac{8}{3}+3\right)$$

$$-2{,}197 = -2{,}197 \quad ✓$$

d. $\log(\sqrt{x+1}) + \log(\sqrt{x-1}) = \log(5)$

pr. 4a

$$\log(\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}) = \log(5)$$

$$\sqrt{(x+1)(x-1)} = 5 \quad (\,)^2$$

$$x^2 - 1 = 25 \Rightarrow x = \begin{cases} \underline{\underline{\sqrt{26}}} \\ \cancel{-\sqrt{26}} \end{cases}$$

clairement impossible

<u>Vérification pour $x = \sqrt{26}$</u>

$$\log\left(\sqrt{\sqrt{26}+1}\right) + \log\left(\sqrt{\sqrt{26}-1}\right) \overset{?}{=} \log(5)$$

$$0{,}3926 + 0{,}3063 = 0{,}6989 \quad ✓$$

e. $\log(x^2+3x-1) = 2$ | $10^{(\,)}$ des deux côtés

$$\text{pr. 3b}\quad \underbrace{10^{\log(x^2+3x-1)}}_{x^2+3x-1} = 10^2 \qquad | \text{ on simplifie}$$

$$x^2+3x-1 = 100$$

$$x^2+3x-101 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+404}}{2} \;\Big\langle\; \begin{matrix} \underline{\underline{8,6612}} \\ \underline{\underline{-11,6612}} \end{matrix}$$

Vérification pour $8,6612$: $\log(8,6612^2 + 3\cdot 8,6612 - 1) = 2$ ✓

" " $-11,6612$: $\log((-11,6612)^2 - 3\cdot 11,6612 - 1) = 2$ ✓

Exercice 6.9

a. $3^x + 9^x = 90$ $\qquad 9 = 3^2 \Rightarrow 9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = (3^x)^2$

$$y + y^2 = 90$$

$$y^2 + y - 90 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+360}}{2} \;\Big\langle\; \begin{matrix} 9 \\ -10 \end{matrix}$$

⚠ on cherche x, pas y

Comme $y = 3^x$, on a $3^x = 9 \Rightarrow \underline{\underline{x = 2}}$.

" " on a $3^x = -10$, ce qui est impossible $(3^x > 0, \forall x)$

b. $e^{3x} = 5$

$$\text{pr.3a}\quad \underbrace{\ln(e^{3x})}_{3x} = \ln(5)$$

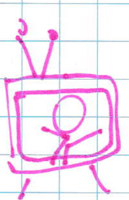
$$3x = \ln(5)$$

$$x = \frac{\ln(5)}{3} \cong 0,5365$$

c. $4e^{-3x} - 3e^{-x} - e^x = 0$ $\quad | \cdot e^{-x}$

$$4e^{-4x} - 3\cdot e^{-2x} - 1 = 0 \qquad y = e^{-2x}$$

oui je sais, ce n'est pas évident...



$$4y^2 - 3y - 1 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{8} \;\Big\langle\; \begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{matrix}$$

⚠ on cherche x, pas y

Comme $y = e^{-2x}$, on a $e^{-2x} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x = 0}}$

" " , on a $e^{-2x} = -\frac{1}{4}$, ce qui est impossible ($e^{-2x} > 0, \forall x$)

Exercice 6.10

a. $2^{x^2} = 512$

$2^{x^2} = 2^9$

$x^2 = 9 \Rightarrow \underline{\underline{x = \pm 3}}$

b. $7^{x^2+x} = 49$

$7^{x^2+x} = 7^2$

$x^2 + x = 2$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2)(x-1) = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = -2}}, \; \underline{\underline{x_2 = 1}}$

c. $\frac{1}{10^x} = 10'000$

$10^{-x} = 10^4$

$-x = 4 \Rightarrow \underline{\underline{x = -4}}$

Ex 6.11

a. $\begin{cases} \log(x) + \log(y) = 2 \\ x + y = 25 \end{cases}$

$\log(x) + \log(y) = 2 \Rightarrow \log(x \cdot y) = 2 \Rightarrow \underbrace{10^{\log(x \cdot y)}}_{x \cdot y} = 10^2$, $x \cdot y = 100$

$x + y = 25 \Rightarrow x = 25 - y$

$\Rightarrow (25 - y)\, y = 100$

$-y^2 + 25y - 100 = 0$

$y^2 - 25y + 100 = 0$

$(y - 20)(y - 5) = 0 \Rightarrow y_1 = 20 \qquad y_2 = 5$

$x_1 = 5 \qquad x_2 = 20$

b. $\begin{cases} \ln(x) - \ln(y) = 1 \\ x \cdot y = e \end{cases}$

$x \cdot y = e \Rightarrow x = \frac{e}{y}$

$\ln\left(\frac{e}{y}\right) - \ln(y) = 1$

$\ln\left(\frac{e}{y^2}\right) = 1 \Rightarrow$ il faut que $\frac{e}{y^2} = e$ $\Rightarrow y = \begin{cases} 1 \\ \cancel{-1} \end{cases}$

puisque $\ln(e) = 1$

car $\ln(-1)$ n'existe pas

$\Rightarrow \underline{\underline{y = 1}} \Rightarrow \underline{\underline{x = e}}$

Exercice 6.12

$$\log_2(16) = \frac{\log(16)}{\log(2)} = 4 = \frac{\ln(16)}{\ln(2)}$$ (on a le choix)

$$\log_3(16) = \frac{\log(16)}{\log(3)} \cong 2,524$$

$$\log_4(16) = \frac{\log(16)}{\log(4)} = 2$$ etc. Je pense que vous avez compris...

$\vdots$

Exercice 6.13

Cet exercice est le plus dur du chapitre. Si vous le maîtrisez, cela veut dire que vous avez tout compris ! Il ressemble à l'ex 6.8, sauf que les log ne sont pas forcément dans la même base.

a. $\log(x) - \log(x+1) = 3\log(4)$

pr 5a $\quad \log\left(\frac{x}{x+1}\right) = \log(4^3)$ $\quad$ pr. 6a

$$\frac{x}{x+1} = 64$$

$$x = 64(x+1)$$

$$x = 64x + 64 \Rightarrow x = \cancel{-\frac{64}{63}}$$ impossible car $\log\left(-\frac{64}{63}\right)$ n'existe pas

b. $\log_2(x+7) + \log_2(x) = 3$

pr 4a $\quad \log_2((x+7)\cdot x) = \log_2(2^3)$ $\quad$ pr. 3a

$$x^2 + 7x = 8$$

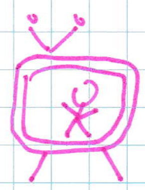
$$x^2 + 7x - 8 = 0$$

$$(x+8)(x-1) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} \cancel{-8} \\ \underline{\underline{1}} \end{cases}$$ car $\log_2(-8)$ n'existe pas

Vérification pour $x = 1$: $\log_2(8) + \log_2(1) \overset{?}{=} 3$

$$3 + 0 = 3 \quad \checkmark$$

Exercice 6.13 c, façon exercice de style



$$\log_3(x) = \frac{1}{2} + \log_9(4x+15)$$

En base 3

$$\log_3(x) = \log_3(3^{\frac{1}{2}}) + \frac{\log_3(4x+15)}{\log_3(9)} \quad = 2$$

$$\log_3(x) = \log_3(\sqrt{3}) + \frac{1}{2}\log_3(4x+15)$$

$$\log_3(x) = \log_3(\sqrt{3}) + \log_3\left((4x+15)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\log_3(x) = \log_3\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{4x+15}\right) = \log_3\left(\sqrt{12x+45}\right)$$

$$x = \sqrt{12x+45} \quad \left|(\;)^2\right.$$

$$x^2 = 12x+45$$

☆ $$x^2 - 12x - 45 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144+4\cdot 45}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{324}}{2} = \frac{12 \pm 18}{2} \quad \begin{cases} \underline{\underline{15}} \\ \cancel{-3} \end{cases}$$

vérification: $\log_3(15) \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} + \log_9(75)$

$$\frac{\log(15)}{\log(3)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} + \frac{\log(75)}{\log(9)} \Rightarrow 2{,}4649 = 0{,}5 + 1{,}9649 \ \checkmark$$

En base 9

$$\frac{\log_9(x)}{\log_9(3)} = \log_9(9^{\frac{1}{2}}) + \log_9(4x+15)$$

$\frac{1}{2} = \log_9(3)$

$$2\cdot\log_9(x) = \log_9(3) + \log_9(4x+15)$$

$$\log_9(x^2) = \log_9(12x+45)$$

$$x^2 = 12x+45$$

☆ ... (on a déjà fait tous les calculs un peu plus haut)

En base 10

$$\log_3(x) = \frac{1}{2} + \log_9(4x+15)$$

$$\frac{\log(x)}{\log(3)} = \frac{1}{2} + \frac{\log(4x+15)}{\log(9)} \qquad | \cdot \log(9)$$

$$\frac{\log(9)}{\log(3)} \cdot \log(x) = \frac{1}{2} \cdot \log(9) + \log(4x+15)$$

$$\frac{\log(3^2)}{\log(3)} = \frac{2\cancel{\log(3)}}{\cancel{\log(3)}} = 2 \qquad \log(9^{\frac{1}{2}}) = \log(3)$$

$$2\log(x) = \log(3) + \log(4x+15)$$

$$\log(x^2) = \log(12x+45)$$

$$x^2 = 12x+45$$

☆ ...

En base e

$$\frac{\ln(x)}{\ln(3)} = \frac{1}{2} + \frac{\ln(4x+15)}{\ln(9)} \qquad | \ln(9)$$

$$\frac{\ln(9)}{\ln(3)} \cdot \ln(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(9) + \ln(4x+15)$$

$$\frac{\ln(3^2)}{\ln(3)} = \frac{2\cancel{\ln(3)}}{\cancel{\ln(3)}} = 2 \qquad \ln(9^{\frac{1}{2}}) = \ln(3)$$

$$2\ln(x) = \ln(3) + \ln(4x+15)$$

$$\ln(x^2) = \ln(12x+45)$$

$$x^2 = 12x+45$$

☆ ...

d. $\log_4(x) = \frac{1}{8}\log_2(x^2+2)$

$\frac{\log_2(x)}{\log_2(4)} = \log_2\left((x^2+2)^{\frac{1}{8}}\right)$

$2 =$

$\frac{1}{2}\log_2(x) = \log_2\left((x^2+2)^{\frac{1}{8}}\right)$

$\log_2\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \log_2\left((x^2+2)^{\frac{1}{8}}\right)$

$x^{\frac{1}{2}} = (x^2+2)^{\frac{1}{8}} \quad | \, (\,)^8$

$x^4 = x^2+2$

bicarrée

$x^4 - x^2 - 2 = 0 \quad | \, y = x^2$

$y^2 - y - 2 = 0$

$(y-2)(y+1) = 0 \Rightarrow y_1 = 2 \quad x_1 = \sqrt{2}, \quad \cancel{x_2 = -\sqrt{2}}$

impossible à cause du $\log_4(x)$

$y_2 = -1 \Rightarrow$ pas de solutions pour x_3 et x_4

Vérification

$\underbrace{\log_4(\sqrt{2})}_{\frac{1}{4}} = \frac{1}{8}\underbrace{\log_2(4)}_{2}$ ✓

$\underbrace{\log_4(1)}_{0} = \frac{1}{8}\underbrace{\log_2(3)}_{\neq 0}$ ✗

e. $\log_4(x) = -3 + \log_2(x+16)$

$\frac{\log_2(x)}{\log_2(4)} = \log_2(2^{-3}) + \log_2(x+16)$

$2 =$

$\frac{1}{2}\log_2(x) = \log_2\left(\frac{1}{8}\right) + \log_2(x+16)$

$\log_2\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \log_2\left(\frac{1}{8}(x+16)\right)$

$\sqrt{x} = \frac{1}{8}x + 2 \quad | \, (\,)^2$

ne pas oublier ! $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$x = \frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{2}x + 4 \quad | \cdot 64$

$64x = x^2 + 32x + 256$

$x^2 - 32x + 256 = 0$ identité remarquable

$(x-16)^2 = 0$

$\Rightarrow x = 16$

Vérifions : $\log_4(16) \overset{?}{=} -3 + \log_2(32)$

$2 = -3 + 5$ ✓

f. $\log_3(x) \cdot \log_9(x) = 2$

$$\log_3(x) \cdot \frac{\log_3(x)}{\underbrace{\log_3(9)}_{=2}} = 2$$

$$\frac{1}{2} \cdot (\log_3(x))^2 = 2$$

$$(\log_3(x))^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} \log_3(x) = 2 \Rightarrow \overbrace{3^{\log_3(x)}}^{=x} = 3^2 = 9 \\ \log_3(x) = -2 \Rightarrow \underbrace{3^{\log_3(x)}}_{=x} = 3^{-2} = \frac{1}{9} \end{cases}$$

Vérifions :

$$\underbrace{\log_3(9)}_{2} \cdot \underbrace{\log_9(9)}_{1} = 2 \checkmark$$

$$\underbrace{\log_3\left(\frac{1}{9}\right)}_{-2} \cdot \underbrace{\log_9\left(\frac{1}{9}\right)}_{-1} = 2 \checkmark$$

$$\left.\right\} \quad x_1 = 9, \; x_2 = \frac{1}{9}$$

g. $\log(x^2) = \log^2(x)$

$2 \cdot \log(x) = \log^2(x)$ | Posons $y = \log(x)$

$$2y = y^2$$

$$y^2 - 2y = 0$$

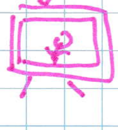
$$y(y-2) = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \log(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$y = 2 \Rightarrow \log(x) = 2 \Rightarrow x_2 = 100$$

Vérifions:

$$\log(1^2) = \log^2(1) \Rightarrow 0 = 0^2 \checkmark$$

$$\log(100^2) = \log^2(100) \Rightarrow 4 = 2^2 \checkmark$$

Exercice 6.14  avec DESMOS

Observez les différences avec les courbes de $\ln(x)$ et e^x.