## Exercice 4.21

a. $y = 2x-3$ on met ce y dans l'équation du cercle

$\Gamma : x^2 + (2x-3)^2 - 3x + 2(2x-3) = 3$

$x^2 + 4x^2 - 12x + 9 - 3x + 4x - 6 = 3$

$5x^2 - 11x = 0 \Rightarrow x(5x-11) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = -3$

$x_2 = \frac{11}{5} \Rightarrow y_2 = \frac{7}{5}$

$\Rightarrow \underline{\underline{A(0;-3)}}$ et $\underline{\underline{B\left(\frac{11}{5};\frac{7}{5}\right)}}$

b. $x = 2y+1$ on met ce x dans l'équation du cercle

$\Gamma : (2y+1)^2 + y^2 - 8(2y+1) + 2y + 12 = 0$

$4y^2 + 4y + 1 + y^2 - 16y - 8 + 2y + 12 = 0$

$5y^2 - 10y + 5 = 0$

$y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow (y-1)^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow \underline{\underline{T(0;1)}}$ c'est un point de tangence

## Exercice 4.22

$\Gamma_1 : x^2 + y^2 + 3x - y = 0$

$\Gamma_2 : x^2 + y^2 + 2x + y = -1$

$\Gamma_1 - \Gamma_2 :$ $x - 2y = 1 \leftarrow$ axe radical $x = 2y+1$

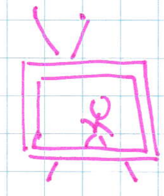
On est retombé sur l'ex 4.21. On introduit x dans $\Gamma_1$.

$\Gamma_1 : (2y+1)^2 + y^2 + 3(2y+1) - y = 0$

$4y^2 + 4y + 1 + y^2 + 6y + 3 - y = 0$

$5y^2 + 9y + 4 = 0$

$y_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4\cdot 5\cdot 4}}{10}$ ⟨ $-\frac{4}{5} \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{5} \Rightarrow \underline{\underline{A\left(-\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right)}}$ ; $-1 \Rightarrow x_2 = -1 \Rightarrow \underline{\underline{B(-1;-1)}}$



À vérifier avec Geogebra...

Utilisez Geogebra pour vérifier visuellement ces résultats

## Exercice 4.23

D'abord, il faut trouver l'équation cartésienne de la droite (AB).

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 10-1 \\ -5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{on peut utiliser } \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ comme vecteur directeur.}$$

Equations paramétriques : $\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \end{cases}$

On élimine $\lambda$ : $2x + 3y = 2 \cancel{+6\lambda} + 3 \cancel{-6\lambda}$

$$2x + 3y = 5 \quad \text{ou} \quad 2x + 3y - 5 = 0$$

Distance : $\delta = \dfrac{|2\cdot 1 + 3\cdot(-2) - 5|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{13}} \cong \underline{\underline{2,496}}$

## Exercice 4.24

$$\Gamma : x^2 + y^2 + 3x - \frac{1}{2}y - \frac{43}{16} = 0$$

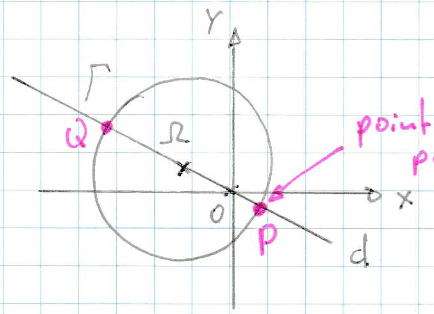
Trouvons le centre et le rayon (voir ex 4.19)

$$\left.\begin{aligned} -2x_0 = 3 &\Rightarrow x_0 = -\frac{3}{2} \\ -2y_0 = -\frac{1}{2} &\Rightarrow y_0 = \frac{1}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\Omega\left(-\frac{3}{2} ; \frac{1}{4}\right)}$$

$$x_0^2 + y_0^2 - r^2 = -\frac{43}{16} \Rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - r^2 = -\frac{43}{16} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{16} + \frac{43}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{80}{16}} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$$

a.




point du cercle le plus proche de l'origine O

$$P = \Gamma \cap d$$

donnera une équation plus simple qu'avec Ω.

équation paramétrique de la droite d : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{O} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}}_{\vec{\Omega O}} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}\lambda \\ y = -\frac{1}{4}\lambda \end{cases}$

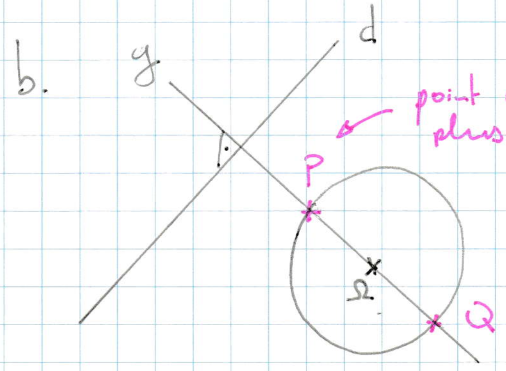
$$\Gamma \cap d : \left(\frac{3}{2}\lambda\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\lambda\right)^2 + 3\cdot\frac{3}{2}\lambda - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\lambda\right) - \frac{43}{16} = 0$$

$$\frac{37}{\cancel{16}}\lambda^2 + \frac{74}{\cancel{16}}\lambda - \frac{43}{\cancel{16}} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-74 \pm \sqrt{74^2 + 4\cdot 37\cdot 43}}{74} \begin{cases} \underline{0,4704} \\ -2,4704 \end{cases}$$

donne Q

$$\Rightarrow P\left(\frac{3}{2}\cdot 0,4704 ; -\frac{1}{4}\cdot 0,4704\right) = \underline{\underline{P(0,7056 ; -0,1176)}}$$

b.




point du cercle le plus proche de d.

$g \perp d$

$\vec{g} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$

rappel : le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est $\perp$ à $ax + by + c = 0$

Equation paramétrique de g : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

même direction que $\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$g : \begin{cases} x = -\frac{3}{2} + 2\lambda \\ y = \frac{1}{4} - \lambda \end{cases}$$

$$g \cap \Gamma : \left(-\frac{3}{2} + 2\lambda\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \lambda\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{2} + 2\lambda\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \lambda\right) - \frac{43}{16} = 0$$

et c'est parti pour une série de calculs ch...

$$\frac{9}{4} \cancel{- 6\lambda} + 4\lambda^2 + \frac{1}{16} \cancel{- \frac{1}{2}\lambda} + \lambda^2 - \frac{9}{2} \cancel{+ 6\lambda} - \frac{1}{8} \cancel{+ \frac{1}{2}\lambda} - \frac{43}{16} = 0$$

$$5\lambda^2 + \underbrace{\frac{36}{16} + \frac{1}{16} - \frac{72}{16} - \frac{2}{16} - \frac{43}{16}}_{= -5} = 0$$

Trop beau pour être faux...

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

$1^{er}$ point (pour $\lambda_1 = 1$) : $\left(-\frac{3}{2} + 2 \,;\, \frac{1}{4} - 1\right) = \left(\frac{1}{2} \,;\, -\frac{3}{4}\right)$

$2^e$ point (pour $\lambda_2 = -1$) : $\left(-\frac{3}{2} - 2 \,;\, \frac{1}{4} + 1\right) = \left(-\frac{7}{2} \,;\, \frac{5}{4}\right)$

qui est P et qui est Q ?

Pour savoir lequel des deux points est le P du dessin, plusieurs choix s'offrent à nous :

1. faire un dessin "précis"
2. comparer les distances entre les 2 points et d.
3. autres...

2. $\delta_1 = \dfrac{\left|8 \cdot \frac{1}{2} - 4\left(-\frac{3}{4}\right) + 73\right|}{\sqrt{8^2 + (-4)^2}} = \dfrac{4 + 3 + 73}{\sqrt{80}} = \dfrac{80}{\sqrt{80}}$

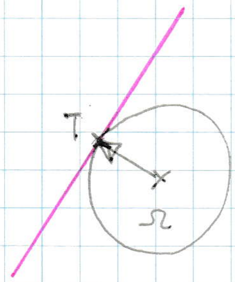
$\delta_2 = \dfrac{\left|8 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) - 4\left(\frac{5}{4}\right) + 73\right|}{\sqrt{8^2 + (-4)^2}} = \dfrac{-28 - 5 + 73}{\sqrt{80}} = \dfrac{40}{\sqrt{80}}$

P est le $2^e$ point :

$P\left(-\frac{7}{2} \,;\, \frac{5}{4}\right)$

# Exercice 4.25

a. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$




$$\left.\begin{array}{l} -2x_0 = 4 \Rightarrow x_0 = -2 \\ -2y_0 = -6 \Rightarrow y_0 = 3 \end{array}\right\} \Omega(-2\,;3)$$

$x_0^2 + y_0^2 - r^2 = -12 \Rightarrow (-2)^2 + 3^2 - r^2 = -12 \Rightarrow r = 5$ (inutile ici)

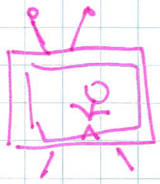
$$\overrightarrow{\Omega T} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ tangente : $-3x + 4y + c = 0$ on introduit T pour trouver c

$-3\cdot(-5) + 4(7) + c = 0 \Rightarrow c = -43$

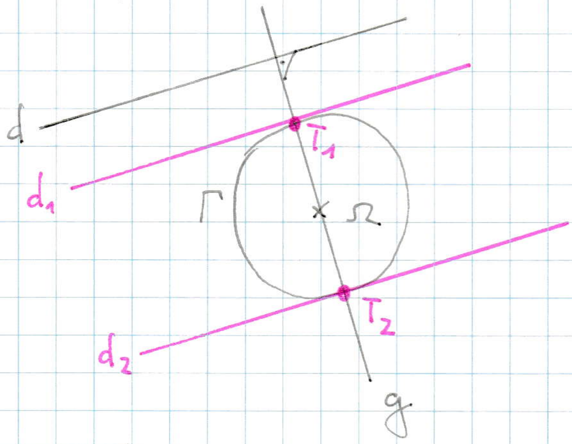
$\Rightarrow$ tangente : $-3x + 4y - 43 = 0$ ou $3x - 4y + 43 = 0$

b. $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$



$$\left.\begin{array}{l} -2x_0 = 10 \Rightarrow x_0 = -5 \\ -2y_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 1 \end{array}\right\} \Omega(-5\,;1)$$

$x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 6 \Rightarrow 25 + 1 - r^2 = 6 \Rightarrow r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ (inutile ici)




d: $2x + y - 7 = 0$

g: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\Omega} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Trouvons $T_1$ et $T_2$ : $g \cap \Gamma$

$(-5+2\lambda)^2 + (1+\lambda)^2 + 10(-5+2\lambda) - 2(1+\lambda) + 6 = 0$

$25 - \cancel{20\lambda} + 4\lambda^2 + 1 + \cancel{2\lambda} + \lambda^2 - 50 + \cancel{20\lambda} - 2 - \cancel{2\lambda} + 6 = 0$

$5\lambda^2 - 20 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2$

$T_1(-5+2\cdot 2\,; 1+2\cdot 1) = T_1(-1\,;3)$

$T_2(-5-2\cdot 2\,; 1-2\cdot 1) = T_2(-9\,;-1)$

Trouvons $d_1$ et $d_2$ $\quad d_1, d_2 \parallel d$

$d_1 : 2x + y + c = 0$ introduisons $T_1$ dans $d_1$ pour trouver c

$2(-1) + 3 + c = 0 \Rightarrow c = -1$

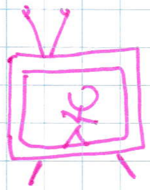
$\Rightarrow d_1 : \underline{\underline{2x + y - 1 = 0}}$

$d_2 : 2x + y + c = 0$ on introduit $T_2$

$2 \cdot (-9) - 1 + c = 0 \Rightarrow c = 19$

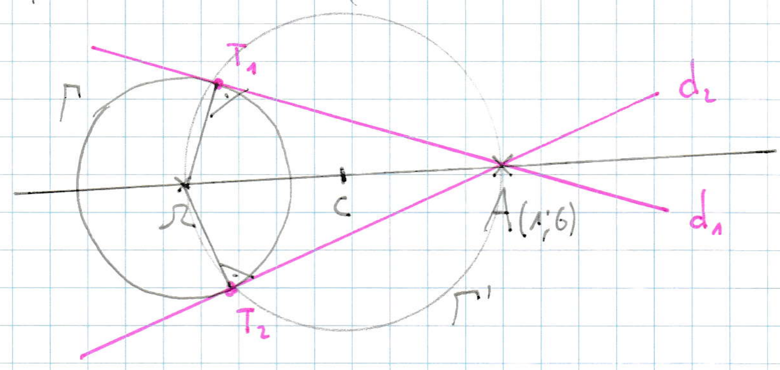
$\Rightarrow d_2 : \underline{\underline{2x + y + 19 = 0}}$

c. $\Gamma : x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$



$$\left.\begin{array}{l} -2x_0 = 2 \Rightarrow x_0 = -1 \\ -2y_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0 \end{array}\right\} \Omega(-1;0)$$

$x_0^2 + y_0^2 - r^2 = -19 \Rightarrow (-1)^2 - r^2 = -19 \Rightarrow r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ (inutile ici)




$T_1$ et $T_2$ sont les intersections du cercle $\Gamma$ et du cercle de centre C (milieu du segment $A\Omega$) et de rayon $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{A\Omega}\|$

$C\left(\frac{-1+1}{2} ; \frac{0+6}{2}\right) = C(0;3)$ $\qquad \|\overrightarrow{A\Omega}\| = \left\|\begin{pmatrix} -1-1 \\ 0-6 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma' : x^2 + (y-3)^2 = 10 \\ \Gamma' : x^2 + y^2 - 6y - 1 = 0 \end{array}\right\} \text{on a développé...}$$

$\underline{\Gamma \cap \Gamma'}$

$$\begin{array}{rl} \Gamma : & x^2 + y^2 + 2x \qquad - 19 = 0 \\ \Gamma' : & x^2 + y^2 \qquad - 6y - 1 = 0 \\ \hline \Gamma - \Gamma' : & 2x + 6y - 18 = 0 \\ & x + 3y - 9 = 0 \end{array}$$

(axe radical)

$\Rightarrow x = 9 - 3y$

dans $\Gamma$ : $(9-3y)^2 + y^2 + 2(9-3y) - 19 = 0$

$81 - 54y + 9y^2 + y^2 + 18 - 6y - 19 = 0$

$10y^2 - 60y + 80 = 0$

$y^2 - 6y + 8 = 0$

$(y-2)(y-4) = 0 \quad \Rightarrow y_1 = 2 \quad \Rightarrow x_1 = 9 - 3\cdot 2 = 3 \quad \Rightarrow T_1(3;2)$

$\Rightarrow y_2 = 4 \quad \Rightarrow x_2 = 9 - 3\cdot 4 = -3 \quad \Rightarrow T_2(-3;4)$

La droite $d_1$ passe par A et $T_1$ : $y = mx + h$

On introduit A : $6 = m\cdot 1 + h$ ①

" $T_1$ : $2 = m\cdot 3 + h$ ②

① - ② $4 = -2m \Rightarrow m = -2 \Rightarrow h = 8 \Rightarrow d_1 : \underline{\underline{y = -2x + 8}}$

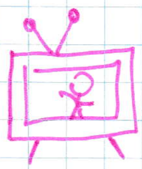
La droite $d_2$ passe par A et $T_2$ :

① $6 = m\cdot 1 + h$

② $4 = m\cdot(-3) + h$

① - ② $2 = 4m \Rightarrow m = \frac{1}{2} \Rightarrow h = \frac{11}{2} \Rightarrow d_2 : \underline{\underline{y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}}}$

## Exercice 4.26



Facile et rapide avec Geogebra...

À la main, la partie a) est très facile. Un dessin suffit...
Par contre, la partie b) est assez longue. Il faut d'abord trouver le centre du cercle (intersection de deux bissectrices), puis le rayon en calculant la distance entre le centre et une des trois droites du triangle.