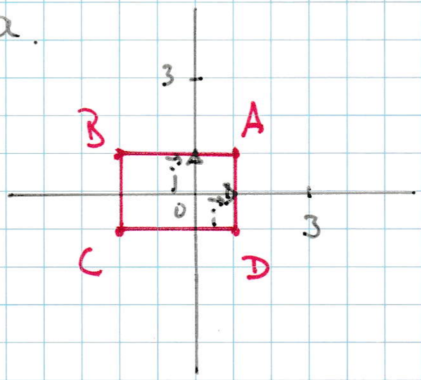
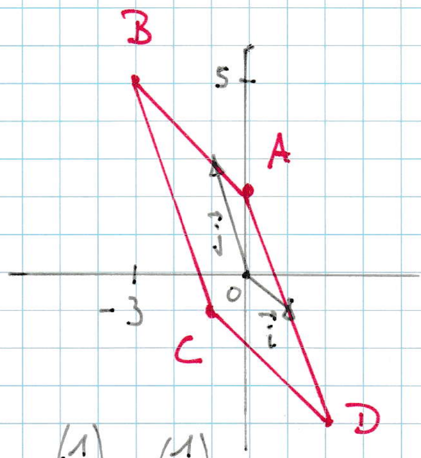
Géométrie analytique du plan

Exercice 4.1

a.



b.



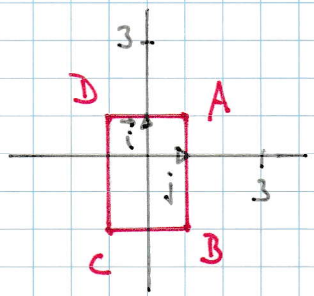
A: $1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

B: $-2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$

C: $-2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

D: $1\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$

c.



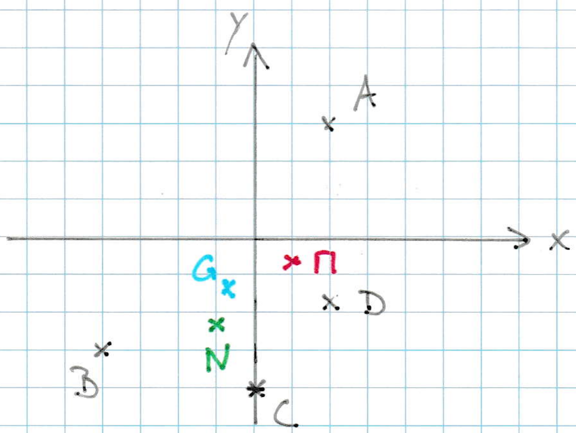
A: $1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

B: $-2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

etc.

Exercice 4.2

a.



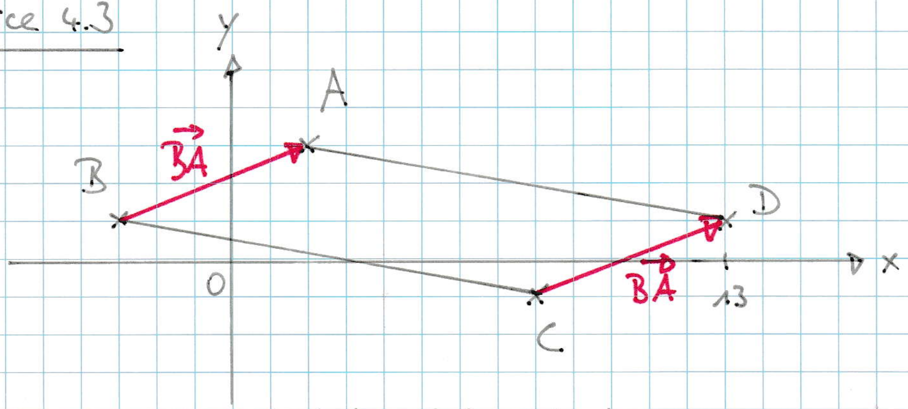
b. $\boxed{\Pi}$: milieu de AC $\left(\frac{2+0}{2} ; \frac{3-4}{2}\right) = \underline{\underline{\left(1 ; -\frac{1}{2}\right)}}$

$\boxed{N}$: milieu de BD $\left(\frac{-4+2}{2} ; \frac{-3-\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{\underline{(-1 ; -2{,}366)}}$

c. $\boxed{G}\left(\frac{2-4+0}{3} ; \frac{3-3-4}{3}\right) = \underline{\underline{G\left(-\frac{2}{3} ; -\frac{4}{3}\right)}}$

Exercice 4.3

a.



Attention à l'ordre des lettres !

ABCD ≠ ABDC

$$\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{BA} = \begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{D(13;1)}}$$

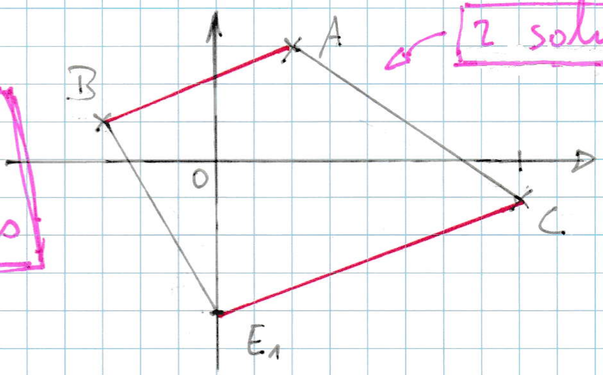
I : milieu de BD (ou de AC) ⚠ pour un parallélogramme !

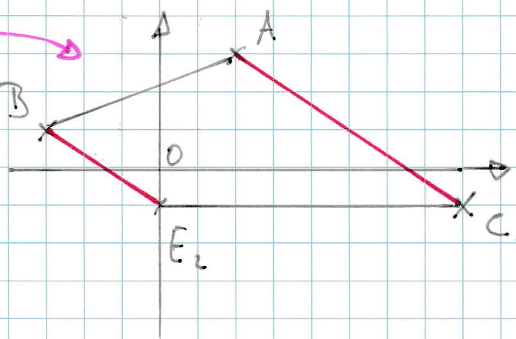
$$I\left(\frac{-3+13}{2};\frac{1+1}{2}\right) = \underline{\underline{I(5;1)}} = I\left(\frac{2+8}{2};\frac{3-1}{2}\right)$$

b.

$\boxed{\text{2 solutions}}$

$\boxed{\text{Trapèze : 1 paire de côtés parallèles}}$





$\vec{AB} \,//\, \vec{CE_1}$ | $AC \,//\, BE_2$

car $\|\vec{AB}\| \neq \|\vec{CE_1}\|$

E_1 est sur l'axe des y!

$$\vec{OE_1} = \vec{OC} + \lambda \cdot \vec{AB} \qquad \vec{OE_2} = \vec{OB} + \mu \vec{AC}$$

$$\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 8 - 5\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{8}{5} \\ y = -1 - 2\lambda \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} 0 = -3 + 6\mu \Rightarrow \mu = \frac{1}{2} \\ y = 1 - 4\mu \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -1 - 2 \cdot \frac{8}{5} = \frac{-21}{5} \qquad \Rightarrow y = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

$$\underline{\underline{E_1(0;-4{,}2)}} \qquad \underline{\underline{E_2(0;-1)}}$$

Exercice 4.4

a. $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Comme $\vec{AB} = -2 \cdot \vec{CD}$, les vecteurs ont la même direction.
Donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

b. $\vec{BD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{CE} = \begin{pmatrix} 50 \\ -40 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ -41 \end{pmatrix}$

Ici les vecteurs ne sont pas multiples, donc ils ont des directions différentes. Donc les droites ne sont pas parallèles.

Exercice 4.5

a. Ce serait oui si $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ sont multiples.

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas multiples. Donc A, B et C ne sont pas alignés.

b. paramètre

$$d(AB) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{point} \\ \text{d'ancrage} \\ (A)}} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{vecteur} \\ \text{directeur} \\ (\vec{AB})}}$$

éq. paramétrique de la droite (AB)

Il reste à <u>choisir</u> 3 valeurs pour λ, mais <u>pas</u> $\lambda = 0$ (on trouverait A), <u>ni</u> $\lambda = 1$ (on trouverait B).

$\lambda = 2$: $(1 + 2 \cdot (-3) ; -1 + 2 \cdot 4) = (-5 ; 7)$

$\lambda = -1$: $(1 - 1(-3) ; -1 - 1 \cdot 4) = (4 ; -5)$

$\lambda = \frac{1}{2}$: $(1 + \frac{1}{2}(-3) ; -1 + \frac{1}{2} \cdot 4) = (-\frac{1}{2} ; 1)$

Exercice 4.6

a. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}}_{A} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AB}}$

b. Le point x est aligné sur A et B si $\overrightarrow{Ax} = \lambda \overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ n'est pas multiple de $\overrightarrow{AB} \Rightarrow$ C pas aligné sur A et B

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ idem. D pas aligné sur A et B.

$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow$ E est sur la droite (AB)

$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} -139 \\ 43 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -141 \\ 47 \end{pmatrix} = 47 \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow$ F est sur la droite (AB)

double de l'ordonnée

c. $\begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 2 - 3\lambda & (1) \\ y = -4 + \lambda & (2) \end{cases}$

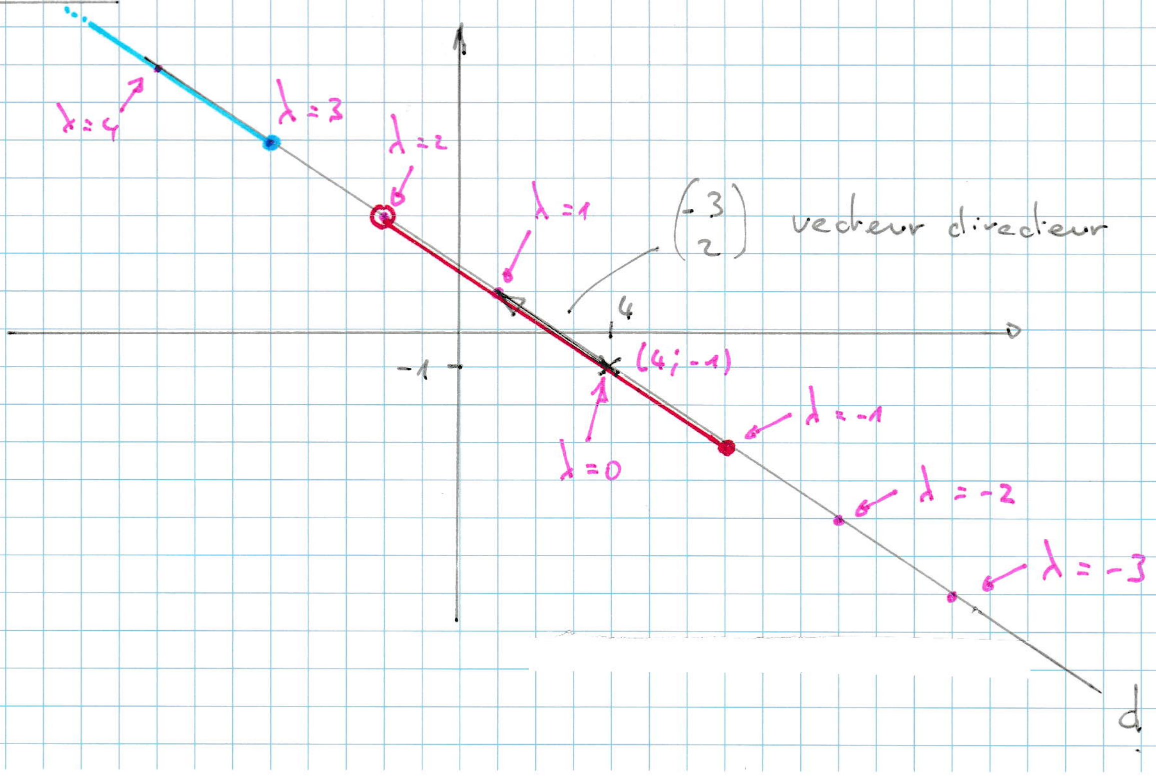
ordonnée

$(1) - 2\cdot(2):\ 0 = 10 - 5\lambda \Rightarrow \lambda = 2$

$(2) \Rightarrow y = -4 + 2 = -2$

$\Rightarrow \underline{\underline{K(-4\,;-2)}}$

Exercice 4.7



Exercice 4.8

a. $\vec{AC} = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix} \Rightarrow$ on peut utiliser $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur. Rappel : n'importe quel multiple de $\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$ peut être un vecteur directeur (ils ont tous la même direction).

B

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

b. la médiane passe par A et le milieu du segment BC.

$$\Rightarrow A'\left(\frac{2+5}{2} ; \frac{-3+4}{2}\right) = A'\left(\frac{7}{2} ; \frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{AA'} = \begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{15}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow \text{on peut utiliser } \begin{pmatrix}15\\-1\end{pmatrix} \text{ comme vect. dir.}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}}_{A} + \lambda \begin{pmatrix}15\\-1\end{pmatrix}$$

Exercice 4.9

$$d(AC) : \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}9\\1\end{pmatrix} \qquad d(BD) : \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-1\\12\end{pmatrix}$$

$d(AC) \cap d(BD)$: $-3 + 9\lambda = 2 - \mu \Rightarrow 9\lambda + \mu = 5$ (1)

intersection

$1 + \lambda = -5 + 12\mu \Rightarrow \lambda - 12\mu = -6$ (2)

(1) $\Rightarrow \mu = 5 - 9\lambda$

(2) $\Rightarrow \lambda - 12(5 - 9\lambda) = -6 \Rightarrow 109\lambda = 54 \Rightarrow \lambda = \frac{54}{109}$ inutile de calculer μ

$$I\left(-3 + \frac{54}{109} 9 ; 1 + \frac{54}{109} 1\right) = I\left(\frac{159}{109} ; \frac{163}{109}\right)$$

Exercice 4.10

Avant de commencer les calculs, on voit que d_2 et d_3 sont soit parallèles, soit confondues (les vecteurs directeurs sont multiples). Cela pourra être utile de le savoir...

$d_1 \cap d_2$: $-2+5k = 3-3\lambda \Rightarrow 5k+3\lambda = 5$ ①

$3-k = 2\lambda \Rightarrow k+2\lambda = 3$ ②

② $\Rightarrow k = 3-2\lambda$

① $\Rightarrow 5(3-2\lambda)+3\lambda = 5 \Rightarrow 15-10\lambda+3\lambda = 5 \Rightarrow -7\lambda = -10 \Rightarrow \lambda = \frac{10}{7}$

$\Rightarrow I\left(3-3\cdot\frac{10}{7} ; 2\cdot\frac{10}{7}\right) \Rightarrow I\left(-\frac{9}{7} ; \frac{20}{7}\right)$

$d_1 \cap d_3$: $-2+5k = 9-6\mu \Rightarrow 5k+6\mu = 11$ ①

$3-k = -4+4\mu \Rightarrow k+4\mu = 7$ ②

② $\Rightarrow k = 7-4\mu$

① $\Rightarrow 5(7-4\mu)+6\mu = 11 \Rightarrow 35-20\mu+6\mu = 11 \Rightarrow -14\mu = -24 \Rightarrow \mu = \frac{12}{7}$

$\Rightarrow J\left(9-6\cdot\frac{12}{7} ; -4+4\cdot\frac{12}{7}\right) \Rightarrow J\left(-\frac{9}{7} ; \frac{20}{7}\right)$

On peut éviter de calculer $d_2 \cap d_3$, puisque $I = J$ et que $d_2 /\!/ d_3$. Cela implique forcément que $d_2 = d_3$.

Exercice 4.11

① $x = 7-2\lambda$

② $y = -3+5\lambda$

il faut éliminer λ

$5\cdot$① $+ 2$② : $5x+2y = 35-6 = 29 \Rightarrow 5x+2y-29 = 0$

Ex 4.12

$ax+by+c = 0$

constante

a. si $a=0$, $d: by+c=0 \Rightarrow y = -\frac{c}{b}$: droite horizontale

b. si $b=0$, $d: ax+c=0 \Rightarrow x = -\frac{c}{a}$: droite verticale

c. si $c=0$, $d: ax+by=0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x$: droite passant par l'origine.

Exercice 4.13

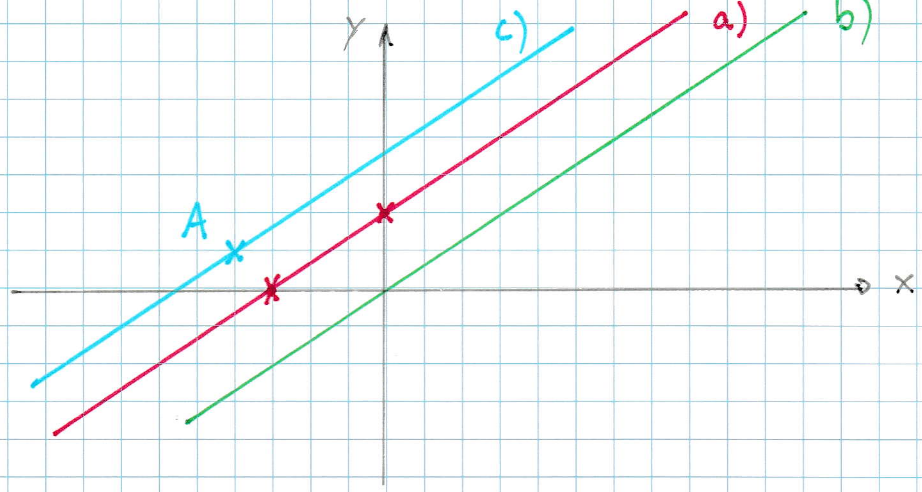
a) $d: \underset{a}{3}x + \underset{b}{2}y - 5 = 0$ $\qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow -b \\ \leftarrow a \end{matrix}$

b) il faut multiplier $\vec{v}$ par $-\frac{7}{2}$ pour que -2 devienne 7.

$\Rightarrow \vec{v}_2 = -\frac{7}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -\frac{21}{2} \end{pmatrix}$

Exercice 4.14

a) La droite passe par $(0;2)$ et $(-3;0)$



b) L'équation de d' "commence" comme d : $2x - 3y + c = 0$. Seul c change. Cela va translater la droite d. Pour que d' passe par l'origine, il faut que $c = 0$.

$\Rightarrow d' : \underline{\underline{2x - 3y = 0}}$

c) Même idée que b), mais, pour trouver c, on va introduire le point A dans l'équation $2x - 3y + c = 0$:

$2(-4) - 3 \cdot 1 + c = 0$

$\Rightarrow c = 11$

$\Rightarrow d'' : \underline{\underline{2x - 3y + 11 = 0}}$