Etudes de fonctions

Exercice 5.2

$p = \dfrac{2ar}{a+r}$ p: distance de mise au point pour que tout soit net entre a et r mètres.

a. $a = 1{,}5 \quad r = 3 \quad \Rightarrow \quad p = \dfrac{2 \cdot 1{,}5 \cdot 3}{1{,}5+3} = \dfrac{9}{4{,}5} = \underline{\underline{2}}$

b. $p = \dfrac{2 \cdot 5 \cdot r}{5+r} = \dfrac{10r}{5+r}$ $=$

or, $10 - \dfrac{50}{5+r} = \dfrac{10(5+r)-50}{5+r} = \dfrac{\cancel{50}+10r\cancel{-50}}{5+r} = \dfrac{10r}{5+r}$

c. 1. $p = \dfrac{10r}{5+r} = 10 - \dfrac{50}{5+r}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$ En théorie. Mais vu ce que signifie a ($a > 5$), on a en pratique $D = \{ r \in \mathbb{R} \mid r > 5 \}$

2. Ni paire ni impaire

3. p est nul si $r = 0$. Mais comme $r > 5$, p ne sera jamais nul.

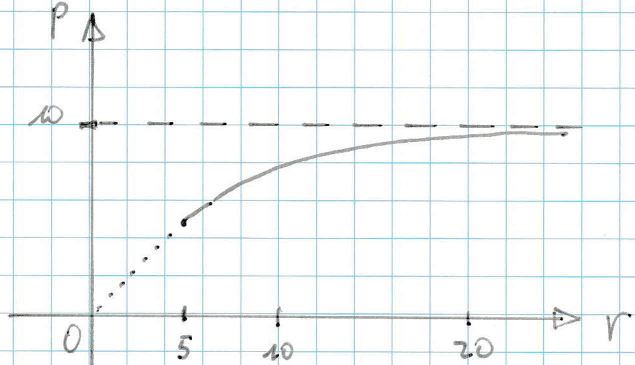
4. A.V en $r = -5$, mais osef!

5. Quand $r \to \infty$, on voit que $p = 10 - \dfrac{50}{\underbrace{5+r}_{\to \infty}} = 10$. C'est une asymptote horizontale.

6. $p' = \dfrac{50}{(5+r)^2} > 0 \Rightarrow$ p est toujours croissante.

7. $p'' = -\dfrac{100}{(5+r)^3} < 0 \Rightarrow$ p est toujours concave. Pas de p.i.

8.



d. $\underline{\underline{10 \text{ m}}}$

(voir point 5)

Exercice 5.3

a. C'est le jour 6, quand la courbe a la plus forte pente.

b. $f(t) = t^2 e^{-0,1t}$

dérivée de l'intérieur

$$f'(t) = 2t\,e^{-0,1t} + t^2 e^{-0,1\cdot t}\cdot(-0,1) = t\cdot e^{-0,1t}(2-0,1t)$$
$$= 0,1t\cdot e^{-0,1t}(20-t)$$

c. $f'(t) = 0$ si $t=0$ ou si $t=20$

t		0		20	
$0,1t$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$e^{-0,1t}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$20-t$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	54,13	$\searrow$
				max	

d. →

osef ($t<0$)

f est donc croissante entre 0 et 20, atteint son maximum en $t=20$ (54'000 malade environ), puis f décroit.

e. $F(t) = (-10t^2 - 200t - 2000)\,e^{-0,1t}$

On verra en 3ème comment calculer ça...

$F(0) = -2000\cdot e^0 = -2000$

$F(10) = -5000\cdot e^{-1} \cong -1840 \Rightarrow \Pi(10) = \frac{1}{10}(-1840+2000) = \underline{\underline{16\ K}}$

$F(20) = -10'000\cdot e^{-2} \cong -1353 \Rightarrow \Pi(20) = \frac{1}{20}(-1353+2000) = \underline{\underline{32,4\ K}}$

$F(60) = -50'000\cdot e^{-6} \cong -124 \Rightarrow \Pi(60) = \frac{1}{60}(-124+2000) = \underline{\underline{31,3\ K}}$

f. $f''(t) = 0 \Rightarrow (0,01t^2 - 0,4t + 2)\,e^{-0,1t} = 0$

$$t_{1,2} = \frac{0,4 \pm \sqrt{0,4^2 - 0,08}}{0,02} \left\langle \begin{array}{l} 34,14 \cong 34 \notin [0;15] \\ 5,85 \cong \underline{\underline{6}} \end{array}\right.$$

g. La nombre de nouveaux malades par jour diminue à partir du 6ème jour. Autrement dit, le nombre de malades continue d'augmenter, mais moins vite.

Exercice 5.4

a. Un peu plus de 800'000 téléspectateurs

b. Calculer la pente : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{82-460}{3-0} = -126$

Interprétation : le 1.1.2000, la chaîne perdait 126'000 téléspectateurs par jour.

c. $f(14) = (20 \cdot 14^2 - 80 \cdot 14 + 460)\, e^{-1,4} = 803'900$ téléspectateurs

d. $f(x) = (20x^2 - 80x + 460)\, e^{-0,1x}$

$f'(x) = (40x - 80)\, e^{-0,1x} + (20x^2 - 80x + 460) \cdot e^{-0,1x} \cdot (-0,1)$

$= e^{-0,1x}\left(40x - 80 - 2x^2 + 8x - 46\right)$

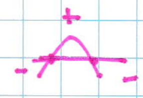
$= (-2x^2 + 48x - 126)\, e^{-0,1x}$ ✓

e. Comme $e^{-0,1x} > 0$, $f'(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 48x - 126 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 - 8 \cdot 126}}{-4} = \frac{-48 \pm 36}{-4} \begin{cases} 3 \\ 21 \end{cases}$$

f.

x	0		3		21		29
$e^{-0,1x}$	+	+	+	+	+	+	+
$-2x^2 + 48x - 126$	−	−	0	+	0	−	−
$f'(x)$	−	−	0	+	0	−	−
$f(x)$	460	↘	296,3	↗	930,6	↘	823,1
			min		max		

← parabole 

g. Non. Le maximum sera atteint en 2021 avec 930'600 téléspectateurs

h. Entre $x = 3$ et $x = 21$, la fonction est strictement croissante. Elle ne peut donc couper la droite horizontale $y = 800$ qu'une fois, puisque $f(3) < 800$ et $f(21) > 800$. Le graphe confirme cela.

voir graphe → C'est en 2014 que l'audience dépassera 800'000 téléspectateurs.

i. $F(18) = (-200 \cdot 18^2 - 3200 \cdot 18 - 36\,600)\, e^{-1,8} = -26282,5$

$F(19) = (-200 \cdot 19^2 - 3200 \cdot 19 - 36\,600)\, e^{-1,9} = -25366,8$

$M = \frac{1}{19-18}\left(F(19) - F(18)\right) = 915,7$ milliers de téléspectateurs