Solutions des exercices

Chapitre 1

1.1. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
$B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
$C = \{0, 1, 4, 9, 16\}$
$D = \{..., -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, ...\}$
$E = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, ...\}$

1.2. $A=\{2x+1 \mid x \in \mathbb{N}\}$
$B=\{4x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } 2 \leqslant x \leqslant 20\}$
$C=\mathbb{Z}^*$
$D=\{x^2 \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ et } x \leq 6\}$
$E=\{\frac{x}{x+1} \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ et } x \leq 6\}$
$F=\{6x+3 \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } x \leq 5\}$

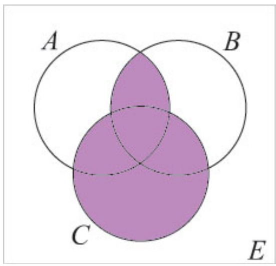
1.3. **a.** $A \setminus (B \cup C)$

b. $B \setminus (A \cap C)$

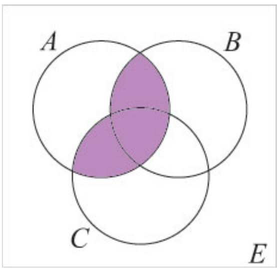
c. $\overline{A \cup B \cup C} \cup (A \cap B \cap C)$

d. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)$

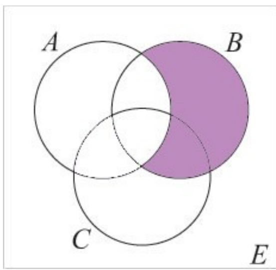
1.4. **a.**



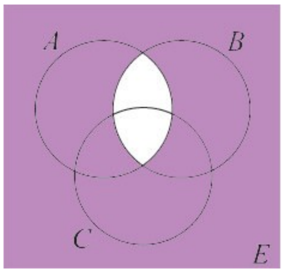
b.



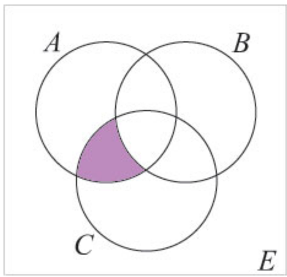
c.



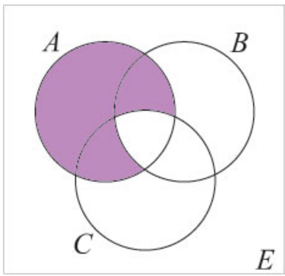
d.



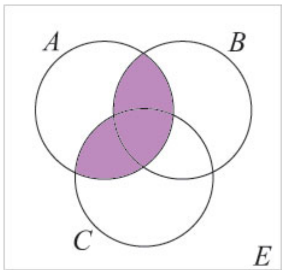
e.



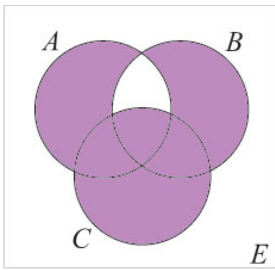
f.



g.



h.



Chapitre 2

2.1. **a.** oui **b.** non **c.** non

2.2. **a.** $\frac{7}{3}$ **b.** $\frac{25}{36}$ **c.** $\frac{8}{3}$ **d.** $\frac{29}{31}$
e. $\frac{3}{8}$ **f.** $\frac{11}{21}$ **g.** $\frac{7}{15}$ **h.** $\frac{12}{7}$

2.3. **a.** 1 **b.** $\frac{7}{6}$ **c.** $\frac{1}{6}$
d. $\frac{11}{12}$ **e.** $\frac{12}{5}$ **f.** $\frac{53}{308}$
g. $\frac{11}{3}$ **h.** $\frac{41}{12}$ **i.** $-\frac{337}{128}$

2.4. **a.** $\frac{16}{5}$ **b.** 55 **c.** $\frac{4}{7}$ **d.** 1

2.5. **a.** $\frac{1}{12}$ **b.** $\frac{9}{20}$ **c.** $\frac{18}{11}$
d. $\frac{175}{216}$

2.6. **a.** $\frac{28}{99}$ **b.** $\frac{428}{99}$ **c.** **1**
d. $\frac{117}{25}$ **e.** $\frac{5852}{24975}$ **f.** 100
g. $\frac{25279}{9999}$ **h.** $\frac{9901}{99}$

2.7. oui

2.8. **a.** $\frac{1}{5}$ **b.** $\frac{1}{4}$

2.9. **a.** le cadeau pour Charlotte est un peu plus cher
b. $\frac{8}{63}$

2.10. **a.** 5.25 € **b.** 15 %

2.11. 1.06 kg

2.12. **a.** 10500 € **b.** 4429.69 €

2.13. **a.** Le gasoil a diminué de 6.5 % environ.
b. Le gasoil coûtera 0.82 €/l

2.14. L'inflation annuelle est de 101.2 %.
Chaque année, les prix ont plus que doublé !

2.15. 38 %

2.16. 299.90 €

2.17. 98.02 %

2.19. **a.** 6 g
b. 7.2 g / sur l'étiquette : 7.2 %
c. 45 %
d. env. 37.8 %

Chapitre 3

3.1. **a.** 7 **b.** 9 **c.** 10
d. 14 **e.** 10/3 **f.** 77
g. $3/x + 2 + 4 \cdot 3 - 1$
h. $4 \cdot x + 5(2+x)$
i. $(x+2)(x-1) + 3 \cdot x - (x+2)$
j. $(x-3)^2 \cdot (x-4) + (x+2)^3$

3.2. **a.** 2.038 **b.** 0.455 **c.** 7009.033
d. 6.349 **e.** $7.6256 \cdot 10^{12}$

3.3. **a.** $n+1$ **b.** $3n$ **c.** $2(n-1)$
d. $n \cdot (n+1)$ **e.** $2n+1$ **f.** 2^n
g. $1/x$ **h.** $-x$ **i.** $2(-1/(4x-1))^2$

3.4.

$x+y$	est une somme
x^2-y^2	est la différence de carrés
$2(x+y)^2$	est le double du carré d'une somme
$(x-y)^2$	est le carré d'une différence
xy	est un produit
$(x+y)^2$	est le carré d'une somme
$(x-y)(x+y)$	est le produit d'une somme par une différence
$2xy$	est un double produit
$(2(x+y))^2$	est le carré du double d'une somme
x^2+y^2	est la somme de carrés

3.6. **a.** $7a(1-a+b)$
b. $(2a+1)(2a-1)$
c. $(a-2)(a^2+2a+4)$
d. $(a-b)(x-3)$
e. $(x+3)(x+2)$
f. $(a-1)(a+1)(a+2)$
g. $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$
h. $(a^2-b^2)^2$
i. $(a+b)(2+a+b)(2-a-b)$
j. $3(x+2)(x-8)$
k. $(x+4)(x-7)$
l. $(1-xy)(1+xy)$
m. $(2a^2+1)(4a^4-2a^2+1)$
n. $(a+b+x)(a+b-x)$
o. $x(x+3)(x-2)$
p. $(a+1)(a^2-4a+7)$
q. $(x+3)(x^2+4)$
r. $(x-1)(x+5)$
s. $4x(x+3)(x-3)$
t. $2(a-1)^3$

3.7. **a.** $\frac{3a^4}{2c^4}$ **b.** $\frac{5}{7}$ **c.** $\frac{1+b}{2b}$
d. $b-a$ **e.** $\frac{a^2+a+1}{(a-1)^2}$ **f.** $\frac{x-3}{x-2}$

3.8. **a.** $\frac{5a}{6}$ **b.** $\frac{14a}{15}$ **c.** $\frac{4-a^2}{2a}$
d. $\frac{a+b}{ab}$ **e.** $\frac{5x}{(x+2)(x-3)}$ **f.** $\frac{1}{b-a}$

3.9. **a.** $\frac{2}{3}b^2$ **b.** $\frac{ab(a-b)}{a+b}$ **c.** $\frac{a^2c}{2b}$

3.10. **a.** $x=-1/6$ **b.** $\mathbb{R}$
c. $x=\pm 2$ **d.** $x=0$
e. pas de solution

3.11.
a. $r=\pm\sqrt{G\frac{m_1m_2}{F}}$; $G=\frac{Fr^2}{m_1m_2}$; $m_1=\frac{Fr^2}{Gm_2}$;
$m_2=\frac{Fr^2}{Gm_1}$

b. $L=\frac{T^2g}{4\pi^2}$; $g=\frac{4\pi^2L}{T^2}$

c. $v_0=v-a\cdot t$; $a=\frac{v-v_0}{t}$; $t=\frac{v-v_0}{a}$

d. $x_0=x-\frac{1}{2}a\cdot t^2$; $a=2\frac{x-x_0}{t^2}$; $t=\pm\sqrt{2\frac{x-x_0}{a}}$

e. $R=\frac{U}{I}$; $I=\frac{U}{R}$

f. $R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$; $R_1=\frac{RR_2}{R_2-R}$; $R_2=\frac{RR_1}{R_1-R}$

g. $R=\frac{U^2}{P}$; $U=\pm\sqrt{PR}$

h. $R=\frac{W}{t\cdot I^2}$; $t=\frac{W}{R\cdot I^2}$; $I=\pm\sqrt{\frac{W}{R\cdot t}}$

Chapitre 4

4.1. **a.** $-15a^2b^2cxy$ **b.** $24ac^3yz^2$

4.2. **a.** $-2a^6b^2c$ **b.** $6a^3b^2d$
c. $16a^8$ **d.** $a^8b^2c^6$
e. $\frac{-2}{a^2c}$ **f.** $\frac{3bd}{ac^2}$
g. $-3a^2b$ **h.** $-2ab^3+2ab^2$

4.3. **a.** $10x^2+8x-9$ degré 2
b. $-5x^3+2x^2+3x$ degré 3
c. $(-5a^2+2a)x$ degré 1
d. $(3ab+1)x^2+2x+3$ degré 2
e. $-bx^3+(a+7)x^2+cx$ degré 3
f. x^6+5x^3 degré 6

4.4. **a.** $ax^2+(-3a^2-1)x$
b. x^3+3x^2-x-3
c. $2x^4+7x^3+x^2-7x-3$
d. x^3+3x^2+3x+1

4.5. $x_1=-7$, $x_2=4$, $x_3=6$

4.6. $x_1=2$, $x_2=2$, $x_3=4$, $x_4=6$

4.7. $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=2$

4.8. $x_{1,2}=1$, $x_3=-1/2$

4.11. $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=9$

4.12. $(2x-5)(x-3)$

Chapitre 5

5.1. **a.** $-1/2$ **b.** $12/25$ **c.** $-3/4$ **d.** $4/5$ **e.** $\mathbb{R}$
f. $-2/3$ **g.** pas de solution

5.2. **a.** 5.5 **b.** pas de solution **c.** 3 **d.** 6
e. 3 **f.** -5

5.3. **a.** 4 **b.** 3 **c.** $\mathbb{R}$ **d.** $4a-b$

5.4. **a.** 1 ; 2 **b.** 1 ; 4 **c.** pas de solution
d. -3 **e.** $\frac{5\pm\sqrt{41}}{4}$ **f.** $1\pm\sqrt{13}$
g. pas de solution **h.** 0 ; $2-\sqrt{5}$

5.5. $k_1=-6$, $k_2=2$

5.6. **a.** 2 ; –2 ; 1 ; –1 **b.** 1 ; –1
c. pas de solution **d.** $\sqrt[3]{7}$; $-\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$

5.7. $x_1=0$, $x_2=3$, $x_3=-2$

5.8. **a.** 7 et 5 **b.** 2 **c.** 4.29 **d.** pas de solution
e. 24/7 **f.** $\sqrt[3]{1\pm\sqrt{5}}$ **g.** 4 et 3
h. 0 et 9

5.9. On n'a pas le droit de simplifier par $(a-b)$, car $a-b=0$!

5.10. Le problème vient du fait $(y-v)^2=(v-y)^2$

Chapitre 6

6.1. **a.** vrai **b.** faux **c.** vrai **d.** vrai

6.2. **a.** [–5 ; 2] **b.**]0 ; 7[**c.** [–6 ; 0[
d.]–2 ; 4[**e.**]–∞ ; –2[**f.**]1 ; +∞[
g.]–∞ ; 0[∪]4 ; 10[
h.]–∞ ; 3[∪ [4 ; +∞[

6.3. **a.** $]-\infty\ ;\ -\frac{8}{3}\ [$ **b.** ∅ **c.** $]-\infty\ ;\ -\frac{4}{5}\ ]$
d. $\mathbb{R}$ **e.**]32 ; +∞[**f.**]–65 ; +∞[
g. [9 ; 19[**h.** $]\ -\frac{9}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\ [$

6.4. **a.** $]-\infty\ ;\ -\frac{3}{4}\ [$ **b.** [2 ; 3]
c.]–∞ ; –4[∪]7 ; +∞[
d.]–2 ; –1[∪]1 ; 2[**e.**]–∞ ; 0[
f. $[-2\ ;\ -\frac{3}{2}\ ] \cup [1\ ;\ +\infty[$

6.5. **a.**]1 ; 2[∪ [3 ; +∞[**b.**]–1 ; 0[∪]1 ; +∞[
c.]–∞; –1] ∪]0 ; 1] **d.** $]-\infty;\ -\frac{1}{3}\ [\ \cup\ ]2;\ +\infty[$

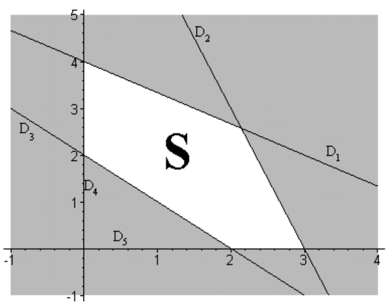
6.6. entre 57 et 76 kilos

6.7. $1 < t < 4$

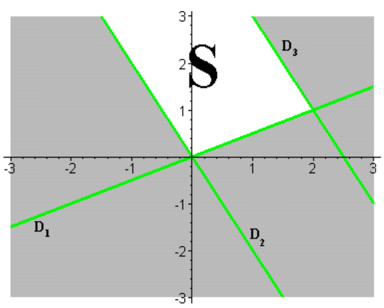
6.8. entre 50 cm et 1 m

6.9. **a.** $\lambda < \frac{9}{16}$ **b.** $\lambda < 0$ ou $\lambda > 12$

6.10. **a.**



b.



Chapitre 7

7.1. $(a + b)^2 = 4 \cdot ab/2 + c^2$ que l'on simplifie.

7.2. Nous savons que I est le milieu de $[BH]$ et que J est le milieu de $[AH]$. Or, on sait que dans un triangle, la droite qui relie les 2 milieux de 2 côtés est parallèle au 3ème côté. En appliquant cette propriété au triangle AHB, on en déduit que (IJ) est parallèle à (BA).
Comme ABC est rectangle en A, alors (BA) est perpendiculaire à (AC). Or, nous venons de démontrer que (IJ) est parallèle à (BA). Par conséquent, (IJ) est perpendiculaire à (AC). (IJ) est donc une hauteur du triangle AIC.
(AH) et (IJ) sont 2 hauteurs du triangle AIC et sont concourantes en J. Comme les 3 hauteurs d'un triangle se coupent en un même point, alors la troisième hauteur de sommet C passe aussi par J. Or la droite (CJ) passe par J : c'est donc la 3ème hauteur du triangle.
(CJ) étant une hauteur de AIC, alors les droites (CJ) et (AI) sont perpendiculaires.

7.3. Si m et n sont de parités différentes, alors le quadrillage habituel d'un échiquier convient.
Si m et n sont tous les deux impairs, on peut colorier l'échiquier par colonnes alternativement noires et blanches.
Si m et n sont tous les deux pairs, soit 2^k la plus grande puissance de 2 qui divise m et n. Regroupons les cases de l'échiquier en hypercases de côté 2^k. En divisant m et n par 2^k, on obtient deux nombres m' et n' qui ne sont pas tous les deux pairs. On est alors ramené à un des deux cas précédents.

7.4. $p^2-1 = (p-1)(p+1)$. Puisque p est premier (et donc impair et non divisible par 3), l'un des deux nombres $(p-1)$, $(p+1)$ est divisible par 2 et l'autre par 4. L'un des deux nombres $(p-1)$, $(p+1)$ se divise par 3. Donc $(p-1)(p+1) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot m = 24m$. Donc $p^2-1 = 24m$.

7.5. $100a+10b+c = 99a+9b+a+b+c$. Il faut donc que $a+b+c$ soit divisible par 3.

7.6. **a.** Si ce n'est pas lundi, alors je n'ai pas mon cours de piano hebdomadaire.
b. Ceux ne parlent pas savent.
c. Si n est un carré, alors son dernier chiffre n'est ni 2, ni 3, ni 7, ni 8.

7.7. **a.** contraposée : $x \le -1 \Rightarrow x^2 \ge 1$ (évident)
b. contraposée : $x \ge 1 \Rightarrow x(x+2)(x-1) \ge 0$. Tous les termes sont ≥ 0, donc le produit aussi.
c. contraposée : x pair $\Rightarrow x^2$ pair. Poser $x = 2n$. $x^2 = 4n^2$ est pair, puisque multiple de 4.

7.9. Supposons qu'il existe un nombre fini (k) de nombres premiers notés p_1, p_2, … p_k. Posons $N = p_1p_2 \dots p_k + 1$. Par construction, N est distinct de p_1, p_2, … p_k, donc n'est pas premier, puisque pas dans notre liste. D'après l'hypothèse, N n'est divisible par aucun des p_i, car le reste de la division euclidienne de N par p_i vaut 1. On vient donc de découvrir un $(k+1)^{\text{ème}}$ nombre premier, ce qui contredit l'hypothèse.

7.10. Raisonnons par l'absurde et supposons que chaque droite divise un domino. Subdivisons le carré en 36 carrés unité et considérons les 2·5 droites qui coupent le carré 6 × 6 mais aucun des carrés unité. Par hypothèse, chacune de ces droites divise au moins un domino.
La droite g divise le grand carré en deux rectangles de la forme 6 × k et 6 × (6-k). En particulier dans chacun des deux rectangles il y a un nombre pair de carrés unité.
Chaque domino qui se trouve entièrement dans un des rectangles y couvre exactement deux carrés unité. Si un domino est coupé en deux par g, alors il couvre exactement un carré unité dans chacun des rectangles.
Il s'ensuit directement que g doit couper en deux un nombre pair de dominos, car sinon il n'y aurait qu'un nombre impair de carrés unité couverts de chaque côté de la droite.
En particulier, nous pouvons conclure que g divise au moins deux dominos. Chacune des 10 droites coupe donc au moins deux dominos. De plus, il est clair qu'un domino ne peut pas être coupé par plus qu'une droite à la fois. Il s'ensuit donc qu'on doit avoir au moins 20 dominos. Comme par hypothèse nous n'en avons que 18, nous obtenons la contradiction désirée.

7.11. **a.** vrai pour $n = 1$
Supposons que la relation est vraie pour n et démontrons-la pour n+1 :

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Nous avons supposé vraie la relation :

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{(n+1)n}{2}$$, donc, on a

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)n+(n+1) =$$

$$(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{1}{2}(n+2)(n+1)$$, qui est ce que nous devions démontrer.

b. et **c.** Même principe que **a.**

7.12. **a.** Parmi n, n+1 et n+2, au moins un des trois est pair et un des trois est multiple de 3. Donc $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6.

b. Par induction :
Vrai pour $n = 0$: 3 est divisible par 3.
Supposons que $7^n + 2$ est divisible par 3.
Pour n+1 on a :
$7^{n+1} + 2 = 7 \cdot 7^n + 2 = 7 \cdot (7^n + 2) - 12$.
Si 7^n+2 est divisible par 3, alors $7 \cdot (7^n+2) - 12$ l'est aussi.
La relation est donc vraie pour tout n entier.

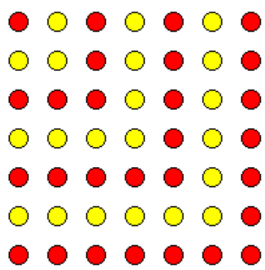
c. Par induction :
Vrai pour $n = 1$. Supposons que c'est vrai pour n.
Pour n+1 on a :

$$(n+1)^5 - (n+1) =$$
$$(n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1) - (n+1) =$$
$$(n^5-n) + 5(n^4+2n^3+2n^2+n).$$

Les deux termes sont divisibles par 5. La relation est donc vraie pour tout n entier.

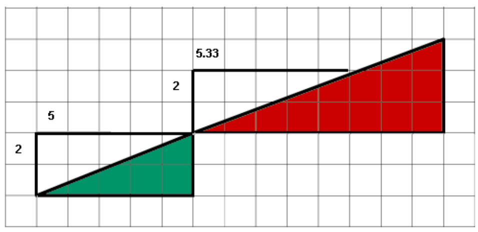
7.13. $r - a + s = 2$ est vrai si le graphe se limite à un sommet. En effet, comme on n'a qu'une région, $1 - 0 + 1 = 2$.
Si on ajoute un sommet, on doit ajouter une arête pour que le graphe reste connexe.
On aura donc $r - (a+1) + (s+1) = r - a + s = 2$.
Si on ajoute une arête entre deux sommets déjà présents, on ajoute forcément une région. On aura donc $(r+1) - (a+1) + s = r - a + s = 2$.

7.15.



$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

7.16.



7.17. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$

Chapitre 8

8.1. Non. La bonne répartition serait 4 besants pour le premier homme et 1 pour le second.

8.2. Deux femmes traversent la rivière et l'une ramène le bateau.
Puis les deux femmes traversent.
Une ramène le bateau et demeure avec son mari.
Les deux autres maris traversent.
Puis l'un d'eux avec sa femme reviennent en bateau.
Les deux hommes traversent.
Et la femme revient.
Puis deux femmes passent.
Enfin, le mari seul va chercher sa femme.

8.3. 12/17 heure.