Ex 5.1. 4

$$f(x) = \frac{x^3+x^2-2}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{(x-1)(x+1)} = \underset{(\star)}{\frac{x^2+2x+2}{x+1}} \quad (\text{si } x \neq 1)$$

1. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

2. $f(-x) = \dfrac{(-x)^3+(-x)^2-2}{(-x)^2-1} = \dfrac{-x^3+x^2-2}{x^2-1} \neq f(x) \Rightarrow$ pas paire

$-f(-x) = -\dfrac{-x^3+x^2-2}{x^2-1} = \dfrac{x^3-x^2+2}{x^2-1} \neq f(x) \Rightarrow$ pas impaire

3. $f(x) = 0 \Rightarrow (x-1)\underbrace{(x^2+2x+2)}_{>0} = 0 \Rightarrow x = 1$, mais $1 \notin D$!

Donc $f(x)$ n'est jamais nulle.

x		-1		1	
x^2+2x+2	$+$	////	$+$	////	$+$
$x+1$	$-$	////	$+$	////	$+$
$f(x)$	$-$	////	$+$	////	$+$

$-\infty \quad +\infty \quad 2,5 \quad 2,5$

4. En $x=-1$, on a bien une A.V car "$\dfrac{\neq 0}{=0}$".

Par contre, en $x=1$, on a "$\dfrac{0}{0}$", et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \underset{(\star)}{=} \dfrac{5}{2}$. C'est un trou.

5. $y = mx + h$.

$m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+2x+2}{x^2+x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1.$

$h = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+2x+2-x(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x} = 1$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = x+1}}$ (idem pour $-\infty$)

6. $f'(x) = \dfrac{(2x+2)(x+1)-(x^2+2x+2)\cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+4x+\cancel{2}-x^2-2x-\cancel{2}}{(x+1)^2}$

$= \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ $\qquad f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$x_2 = -2$

x		-2		-1		0		1	
x	$-$	$-$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$	$+$	$+$		$+$
$(x+1)^2$	$+$	$+$	$+$		$+$	$+$	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-2	$\searrow$		$\searrow$	2	$\nearrow$		$\nearrow$
		max				min			

7. $f''(x) = \dfrac{(2x+2)(x+1)^{\cancel{2}} - (x^2+2x)\,2\cdot\cancel{(x+1)}}{(x+1)^{\cancel{4}\,3}} = \dfrac{2x^2+4x+2-2x^2-4x}{(x+1)^3} =$

$= \dfrac{2}{(x+1)^3}$ $\qquad f''(x) = 0$ pas de solutions

$\Rightarrow$ pas de pts d'inflexion

x		-1		1	
2	$+$		$+$		$+$
$(x+1)^3$	$-$		$+$		$+$
$f''(x)$	$-$		$+$		$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$		$\cup$

8.