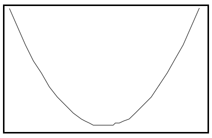
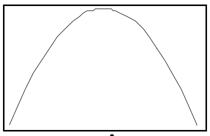
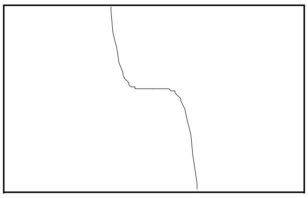
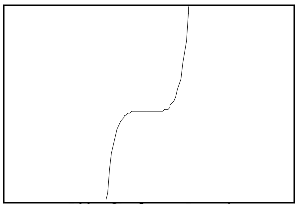
Dérivée : corrigé de l’exercice 3.15

a est l’abscisse de la fonction f où $f'(a) = 0$ (dans le tableau ci-dessous, $a = 0$)

$\varepsilon > 0$, ε aussi proche de 0 que l’on veut.

Les 4 cas où $f\,'(a) = 0$	Conditions sur f	Conditions sur $f\,'$	Conditions sur $f\,''$
 **minimum**	$f(a-\varepsilon) > f(a)$ et $f(a+\varepsilon) > f(a)$	$f'(a-\varepsilon) < 0$ et $f'(a+\varepsilon) > 0$	$f''(a) \geq 0$
 **maximum**	$f(a-\varepsilon) < f(a)$ et $f(a+\varepsilon) < f(a)$	$f'(a-\varepsilon) > 0$ et $f'(a+\varepsilon) < 0$	$f''(a) \leq 0$
 **pt d’infl. à tg horiz.**	$f(a-\varepsilon) > f(a)$ et $f(a+\varepsilon) < f(a)$	$f'(a-\varepsilon) < 0$ et $f'(a+\varepsilon) < 0$	$f''(a) = 0$
 **pt d’infl. à tg horiz.**	$f(a-\varepsilon) < f(a)$ et $f(a+\varepsilon) > f(a)$	$f'(a-\varepsilon) > 0$ et $f'(a+\varepsilon) > 0$	$f''(a) = 0$

Donc :

Pour trouver un minimum, un maximum, ou un point d’inflexion à tangente horizontale d’une fonction f, il faudra résoudre l’équation $f'(x) = 0$.
Pour déterminer dans quel cas on se trouve, on utilisera le tableau ci-dessus. Sur sa calculatrice, on prendra par exemple $\varepsilon = 0.001$.

Exemple tiré de l’exercice 3.3a

$f(x) = x^3 + 5$
$f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. La dérivée est nulle en $a = 0$.

$\underbrace{f(0-0.001)}_{(-0.001)^3+5} < \underbrace{f(0)}_{0^3+5}$ et $\underbrace{f(0+0.001)}_{0.001^3+5} > \underbrace{f(0)}_{0^3+5}$ $\Rightarrow$ point d’inflexion (quatrième ligne du tableau)

On aurait aussi pu utiliser la dérivée : $\underbrace{f'(0-0.001)}_{3\cdot(-0.001)^2} > 0$ et $\underbrace{f'(0+0.001)}_{3\cdot 0.001^2} > 0$ $\Rightarrow$ point d’inflexion

Pour trouver **tous** les points d’inflexion d’une fonction f (pas seulement ceux à tangente horizontale), il faudra résoudre $f''(x) = 0$. Mais **attention** ! Il faudra vérifier que ce sont bien des points d'inflexion...