5. Études de fonctions

5.1. Asymptotes

Asymptote verticale

La droite $x = a$ est dite **asymptote verticale** (A. V.) de la fonction f si l'une au moins des conditions suivantes est vérifiée :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = +\infty \quad (\text{ou } -\infty) \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = +\infty \quad (\text{ou } -\infty)$$

Une A. V. ne peut exister que si la fonction f n'est pas définie en $x = a$.

Asymptote affine

La droite d'équation $y = mx + h$ est une **asymptote affine** (A. A.) de la courbe représentative de la fonction f si

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx+h)] = 0 \qquad (\text{propriété analogue en } -\infty)$$

Les valeurs de m et h sont calculées avec les formules suivantes :

Remarque
Si $m = 0$, l'asymptote est horizontale.

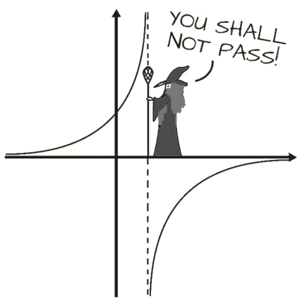
$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad h = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] \qquad (\text{idem en } -\infty)$$

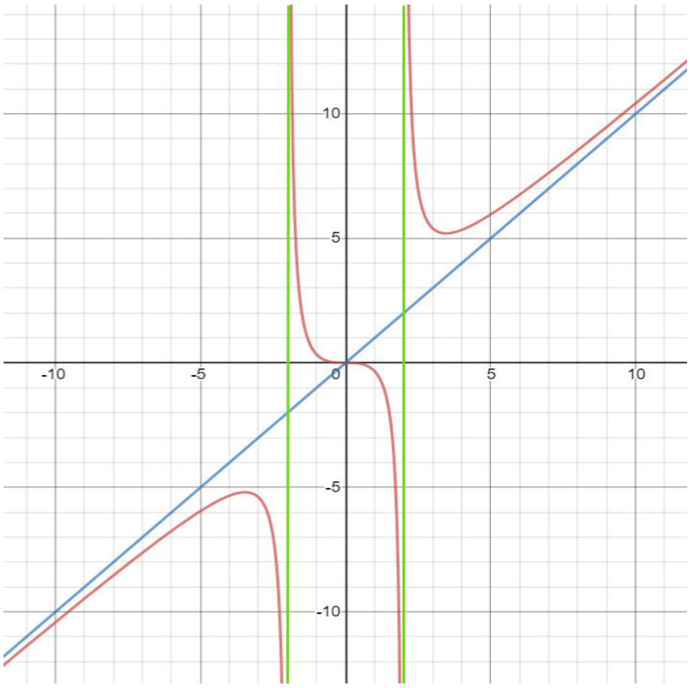
Remarque : Si m tend vers l'infini, alors il n'y a pas d'asymptote affine. Inutile donc d'essayer de calculer h.

C'est en particulier le cas avec des fonctions exponentielles ou la fonction arctan(x).

Attention ! L'asymptote affine n'est pas forcément la même en $+\infty$ et en $-\infty$. Il faut donc étudier les deux cas.

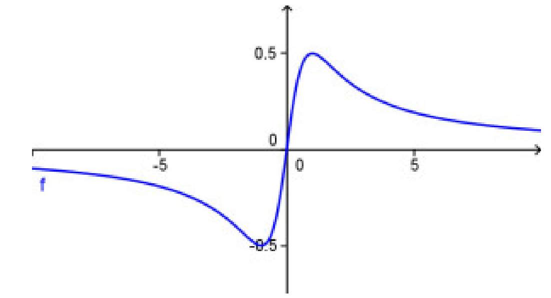
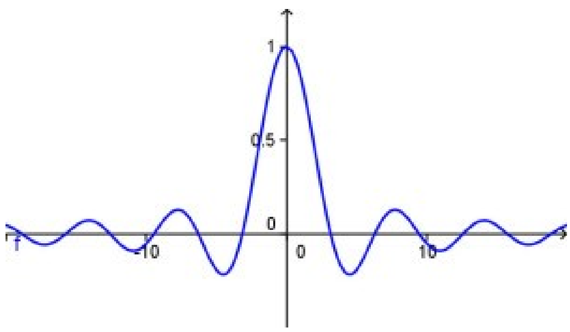
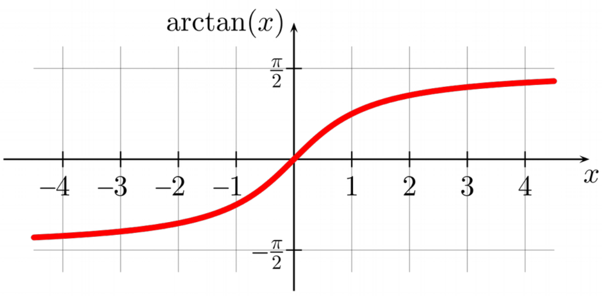
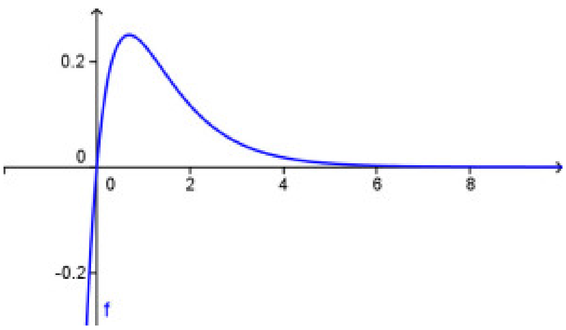
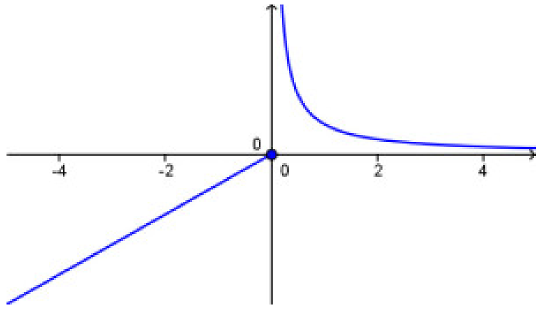
On a dessiné ci-dessous (en rouge) le graphe de la fonction $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$. Il y a deux asymptotes verticales (en vert) et une asymptote affine (en bleu).





Remarquez que la fonction n'est pas définie en $x = -2$ et $x = 2$.

Cinq exemples un peu particuliers

$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ une asymptote horizontale : $y=0$ la courbe coupe l'asymptote.	
$f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$ une asymptote horizontale : $y=0$ elle est coupée une infinité de fois par la fonction. il y a un trou en $x=0$.	
$f(x)=\arctan(x)$ vers $+\infty$, une asymptote horizontale : $y=\frac{\pi}{2}$ vers $-\infty$, une autre asymptote horizontale : $y=-\frac{\pi}{2}$	
$f(x)=-e^{-2x}+e^{-x}$ une asymptote horizontale vers $+\infty$, mais pas d'asymptote vers $-\infty$.	
$f(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ une asymptote verticale en $x=0$. Pourtant la fonction est définie en $x=0$...	

5.2. Méthode

L'étude d'une fonction f comprend huit étapes.
Vous trouverez au § 5.3 un exemple complet qui vous servira d'aide-mémoire.

1. Ensemble de définition

Déterminer le domaine D où la fonction $f(x)$ est définie.

2. Parité

Voir si la fonction est paire, impaire, périodique ou rien du tout. Cela permet, si la fonction est « agréable », de gagner du temps par la suite.
La fonction f est paire si $f(x) = f(-x)$, et impaire si $f(x) = -f(-x)$, $\forall\, x$.

3. Signe de la fonction

Chercher les zéros, puis faire un tableau pour voir où la fonction est négative, positive ou nulle.

4. Asymptotes verticales, trous

Calculer la ou les asymptotes verticales et trouver les éventuels trous.

5. Asymptotes affines

Calculer la ou les asymptotes affines et, si demandé, trouver le positionnement de la courbe par rapport à ces asymptotes.

6. Croissance et points critiques

Un point c de l'ensemble de définition est un **point critique** si $f'(c) = 0$ ou si $f'(c)$ n'existe pas.

Calculer la dérivée et chercher ses zéros. Faire un tableau pour voir comment la fonction croît. Identifier les minima, les maxima et les points d'inflexion à tangente horizontale.

7. Concavité et points d'inflexion

Chercher la concavité de la fonction et les points d'inflexion. Pour cela, calculer la dérivée seconde si elle n'est pas trop compliquée (cette méthode est la seule qui garantit de trouver tous les points d'inflexion). Faire un tableau. Calculer les pentes des tangentes aux points d'inflexion.

8. Représentation graphique

Dessiner la courbe en utilisant tous les renseignements glanés aux étapes 1 à 7.
Faire un grand dessin où l'on représente le graphe de la fonction, les asymptotes et les points particuliers.

5.3. Un exemple complet

Étudions la fonction $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

1. Ensemble de définition

L'ensemble de définition de f est $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. Parité

Si la fonction est paire ou impaire, on peut alors n'étudier que le côté positif. Le côté négatif se déduira du côté positif.

Par « symétrique », on veut dire que toutes les valeurs doivent est présentes dans D avec les signes + et –.

f est paire si $f(x) = f(-x)$. Est-ce le cas ?

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x-1)^2}=\frac{-x^3}{(x+1)^2}\neq f(x)\ .$$

f n'est donc **pas paire**.

f est impaire si $f(x) = -f(-x)$. Est-ce le cas ?

$$-f(-x)=-\frac{(-x)^3}{(x+1)^2}=\frac{x^3}{(x+1)^2}\neq f(x)\ .$$

f n'est donc **pas impaire**.

En fait, puisque le domaine de définition D n'est pas « symétrique », il est évident que la fonction ne peut être ni paire, ni impaire.

3. Signe de la fonction

Cherchons d'abord le(s) zéro(s) de f :

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{x^3}{(x-1)^2}=0 \Rightarrow x^3=0 \Rightarrow x=0\ .$$

Le signe de la fonction est donné par le tableau suivant (dans la première ligne, on met les valeurs de x trouvées aux étapes 1 et 3) :

x	< 0	0	] 0 ; 1 [	1	> 1
x^3	–	0	+		+
$(x-1)^2$	+	+	+		+
$f(x)$	–	0	+		+

4. Asymptotes verticales (A.V.), trous

On peut s'aider du tableau de signes de l'étape 3 pour déterminer le signe de l'infini.

Par exemple, on a vu que $\frac{\sin(x)}{x}$ a un trou en $x = 0$.

Les asymptotes verticales, s'il y en a, se trouvent aux abscisses trouvées à l'étape 1. Il s'agit de vérifier que ce sont bien des asymptotes verticales et non pas des trous.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=+\infty$$

Si on avait un trou, on trouverait que la limite à gauche est égale à la limite à droite et que ces limites seraient égales à un **nombre**.

5. Asymptotes affines (A.A.)

Une asymptote affine est de la forme $y = m \cdot x + h$. On va analyser ce qui se passe en $-\infty$ et en $+\infty$.

Du côté de $+\infty$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$h=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x}{x^2-2x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

Du côté de $+\infty$, l' A.A. est donc $y = x + 2$.

Du côté de $-\infty$ Idem que pour $+\infty$ (le signe ne change rien).

6. Croissance et points critiques

$f'(x)=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$ s'annule en 0 et 3.

Les points du graphe dont les abscisses sont des points critiques de f sont donc (0 ; 0) et (3 ; $\frac{27}{4}$).

La croissance de f est donnée par le tableau suivant (dans la première ligne, on met les valeurs de x trouvées aux étapes 1 et 6) :

x		0		1		3	
$f'(x)$	+	0	+		–	0	+
$f(x)$	↗	0	↗		↘	$\frac{27}{4}$	↗
		pt. d'infl. à tg. hor.				minimum	

7. Concavité et points d'inflexion

$f''(x)=\dfrac{6x}{(x-1)^4}$ s'annule en 0.

La concavité de *f* est donnée par le tableau suivant (dans la première ligne, on met les valeurs de *x* trouvées aux étapes 1 et 7) :

x		0		1	
$f''(x)$	–	0	+		+
$f(x)$	∩	0	∪		∪

pt. d'infl.

Calcul de la pente de la tangente au point d'inflexion

Il y a un seul point d'inflexion en (0 ; 0).

$m=f'(0)=\dfrac{0^2(0-3)}{(0-1)^3}=\dfrac{0}{1}=0$

(on savait déjà d'après l'étape 6 que c'était un point d'inflexion à tangente horizontale).

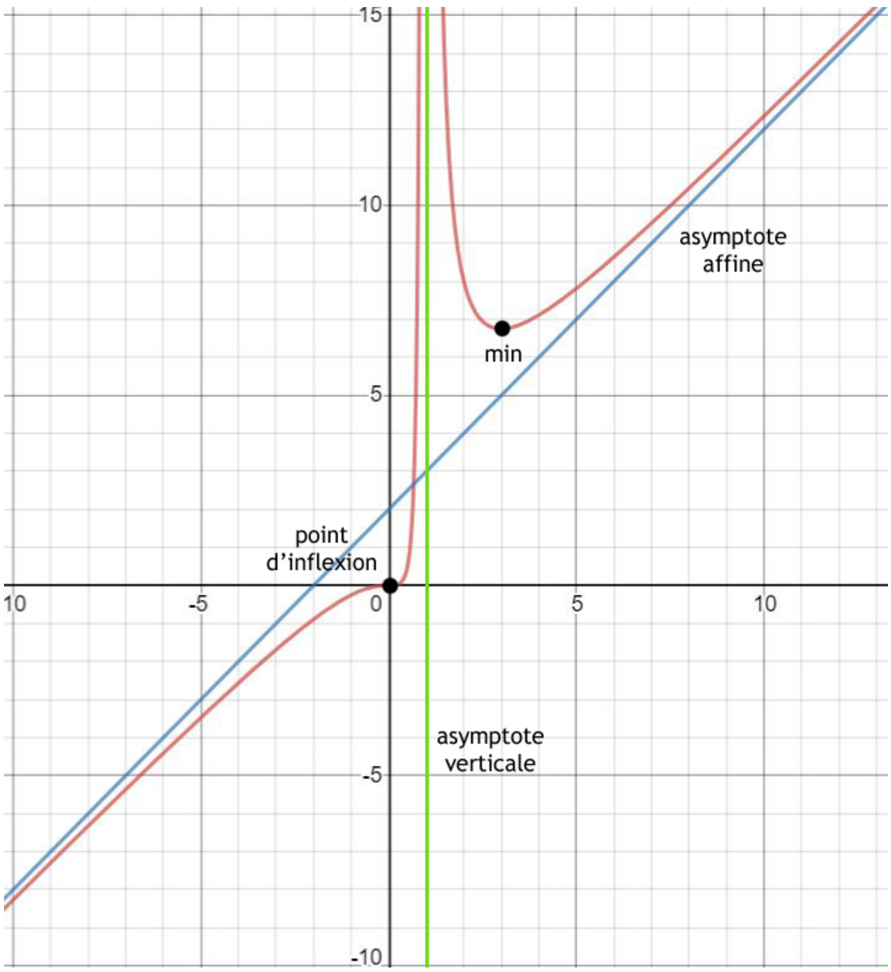
8. Représentation graphique

On trace d'abord les asymptotes trouvées aux étapes 4 et 5.

On place ensuite tous les points que l'on a trouvés aux étapes 3, 6 et 7.

On trace enfin la courbe d'après les indices récoltés aux étapes 2, 3, 6 et 7. Les tableaux en particulier sont d'une aide très précieuse.

Il est conseillé de calculer d'autres points de la fonction et de les reporter sur le dessin.



Remarque
Plutôt que de faire ce graphique à la fin de l'étude, on peut aussi le dessiner au fur et à mesure des étapes.

Exercice 5.1

Étudiez les fonctions suivantes selon l'exemple du § 5.3.
Vous trouverez des corrigés détaillés sur le site de ce cours.

Fonctions rationnelles

1. $f(x)=\dfrac{-3x+4}{2x+3}$

2. $f(x)=\dfrac{x^2-4x-5}{2(x^2-4x+3)}$ aide : $f''(x)=\dfrac{-8(3x^2-12x+13)}{(x^2-4x+3)^3}$

3. $f(x)=\dfrac{x(x-3)^2}{(x-2)^2}$ aide : $f''(x)=\dfrac{6(4-x)}{(x-2)^4}$

4. $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-2}{x^2-1}$

Autres types de fonctions

5. a. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ **5. b.** $f(x)=\sqrt{1+x^2}$

6. $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

7. $f(x)=(2x^2+2x-1)\cdot\mathrm{e}^{-2x}$

8. $f(x)=\dfrac{\ln(x^2)+1}{2x}$

9. $f(x)=(\mathrm{e}^x-5)(\mathrm{e}^x+1)$

Exercice 5.2

En photographie, la *profondeur de champ* correspond à la zone de l'espace dans laquelle doit se trouver le sujet à photographier pour en obtenir une image que l'œil considérera nette.

En optique, pour que la netteté s'étende de la distance a à la distance r, la mise au point doit être faite à la distance $p=\dfrac{2ar}{a+r}$ (les distances sont exprimées en mètres).

a. À quelle distance doit être faite la mise au point pour photographier un sujet dont les éléments intéressants sont à une distance comprise entre 1.5 m et 3 m ?

On souhaite désormais que les sujets soient nets à partir d'une distance de 5 m.

b. Démontrez que pour $a > 5$, $p=10-\dfrac{50}{5+r}$.

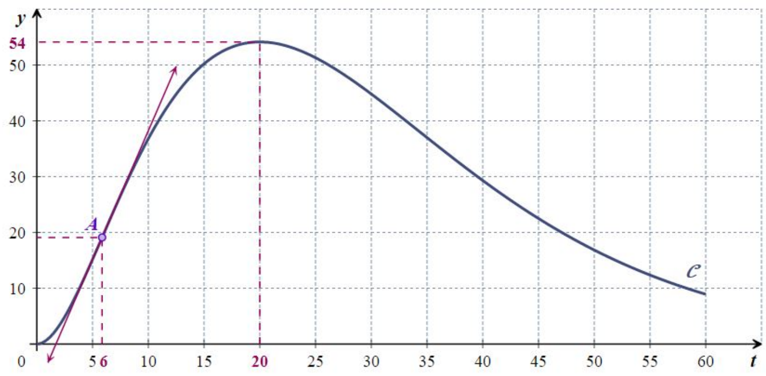
c. Étudiez la fonction p du point **b** et dessinez son graphe.

d. On souhaite que la netteté s'étende de « 5 m à l'infini ». Quelle distance de mise au point doit-on choisir ?

Exercice 5.3

Baccalauréat ES 2015
Nouvelle Calédonie

La courbe $\mathcal{C}$ ci-après représente le nombre de personnes malades (en milliers) dans un pays lors d'une épidémie en fonction du nombre t de jours écoulés depuis l'apparition de la maladie.



a. Estimez graphiquement le jour où la vitesse de propagation de la maladie est la plus forte. Expliquez la démarche utilisée.

On modélise le nombre de malades (en milliers) en fonction du temps, à l'aide de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 60] par $f(t) = t^2 e^{-0.1t}$ où t représente le nombre de jours écoulés depuis l'apparition de la maladie.
Pour étudier les propriétés de la fonction f, on a utilisé un logiciel de calcul formel qui a fourni les résultats suivants :

- $f'(t) = 0.1\,t\,(20-t)\,e^{-0.1t}$
- $f''(t) = (0.01t^2 - 0.4\,t + 2)\,e^{-0.1t}$
- $F(t) = (-10\,t^2 - 200\,t - 2000)\,e^{-0.1t}$

Primitive : voir chapitre 7

où f' désigne la **dérivée** de f, f'' désigne sa **dérivée seconde** et F une **primitive** de f.

b. Confirmez le résultat $f'(t) = 0.1\,t\,(20-t)\,e^{-0.1t}$ qui a été fourni par le logiciel.
c. Déterminez le signe de $f'(t)$ sur [0 ; 60].
d. Dressez le tableau de variation de la fonction f sur [0 ; 60].

e. la théorie est au chapitre 8

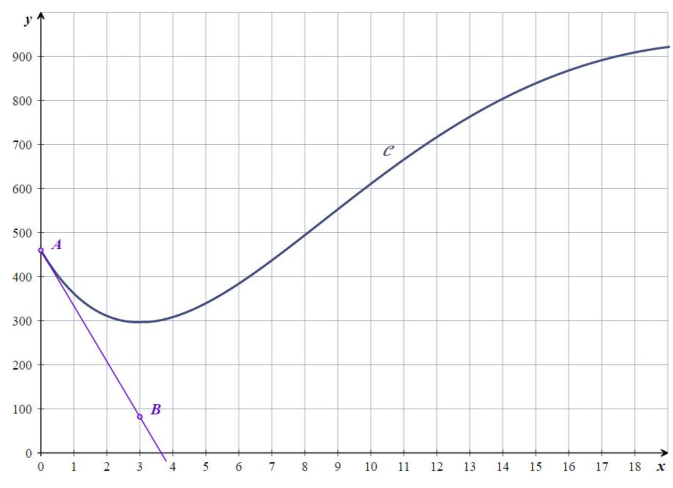
e. Le nombre moyen M de malades par jour, en milliers, durant les n premiers jours après l'apparition de la maladie est donné par $M(n) = \frac{1}{n}(F(n) - F(0))$.

Calculez $M(10)$, $M(20)$ et $M(60)$.
f. Justifiez par le calcul que, sur l'intervalle [0 ; 15], la courbe de la fonction f admet un unique point d'inflexion. Calculez l'abscisse de ce point d'inflexion.
g. Donnez une interprétation concrète de cette abscisse.

Exercice 5.4

Baccalauréat ES 2019
Amérique du Sud

La courbe $\mathcal{C}$ ci-après, associée à une fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 19], représente l'audience journalière d'une chaîne de télévision entre le 1er janvier 2000 (année numéro 0) et le 1er janvier 2019 (année numéro 19), c'est-à-dire le nombre quotidien de téléspectateurs, en milliers.



Ainsi, le 1er janvier 2000 la chaîne a été regardée par environ 460'000 téléspectateurs.

a. Donnez une valeur approchée du nombre de téléspectateurs le 1er janvier 2014.
b. La droite (AB), où les points A et B ont pour coordonnées $A(0\ ;\ 460)$ et $B(3\ ;\ 82)$, est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A.
Déterminez la valeur de $f\,'(0)$, sans calculer la dérivée.
Comment interprétez-vous ce résultat ?

On cherche maintenant à prévoir l'évolution de l'audience de cette chaîne de télévision lors des dix prochaines années. On considère que le nombre journalier (exprimé en milliers) de téléspectateurs de la chaîne est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 29]$ par $f(x) = (20x^2 - 80x + 460)\ e^{-0.1x}$, où x représente le nombre d'années depuis 2000 (par exemple $x = 19$ pour l'année 2019).

c. Calculez au millier près le nombre de téléspectateurs de la chaîne le 1er janvier 2014.
d. Démontrez que la dérivée $f\,'$ est définie par $f\,'(x) = (-2x^2 + 48x - 126)\ e^{-0.1x}$.
e. Construisez le tableau de signes de $f\,'$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 29]$.
f. Construisez le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 29]$.
g. Le nombre journalier de téléspectateurs de cette chaîne de télévision dépassera-t-il la barre du million avant l'année 2029 ? Justifiez.
h. Montrez que l'équation $f(x) = 800$ admet une solution unique dans l'intervalle $[3\ ;\ 21]$. Au cours de quelle année le nombre journalier de téléspectateurs de la chaîne de télévision dépassera-t-il 800'000 ?

On admet que $F(x) = (-200x^2 - 3200x - 36600)\ e^{-0.1x}$ est une primitive de la fonction f.

Voir exercice 5.3 **e**

i. Déterminez à mille près l'audience journalière moyenne de téléspectateurs de la chaîne de télévision entre le 1er janvier 2018 et le 1er janvier 2019.

5.4. Ce qu'il faut absolument savoir

Trouver les asymptotes d'une fonction	❏ ok
Connaître les huit étapes de la méthode par cœur	❏ ok
Maîtriser les huit étapes, en particulier les limites, les dérivées et les tableaux de signes	❏ ok