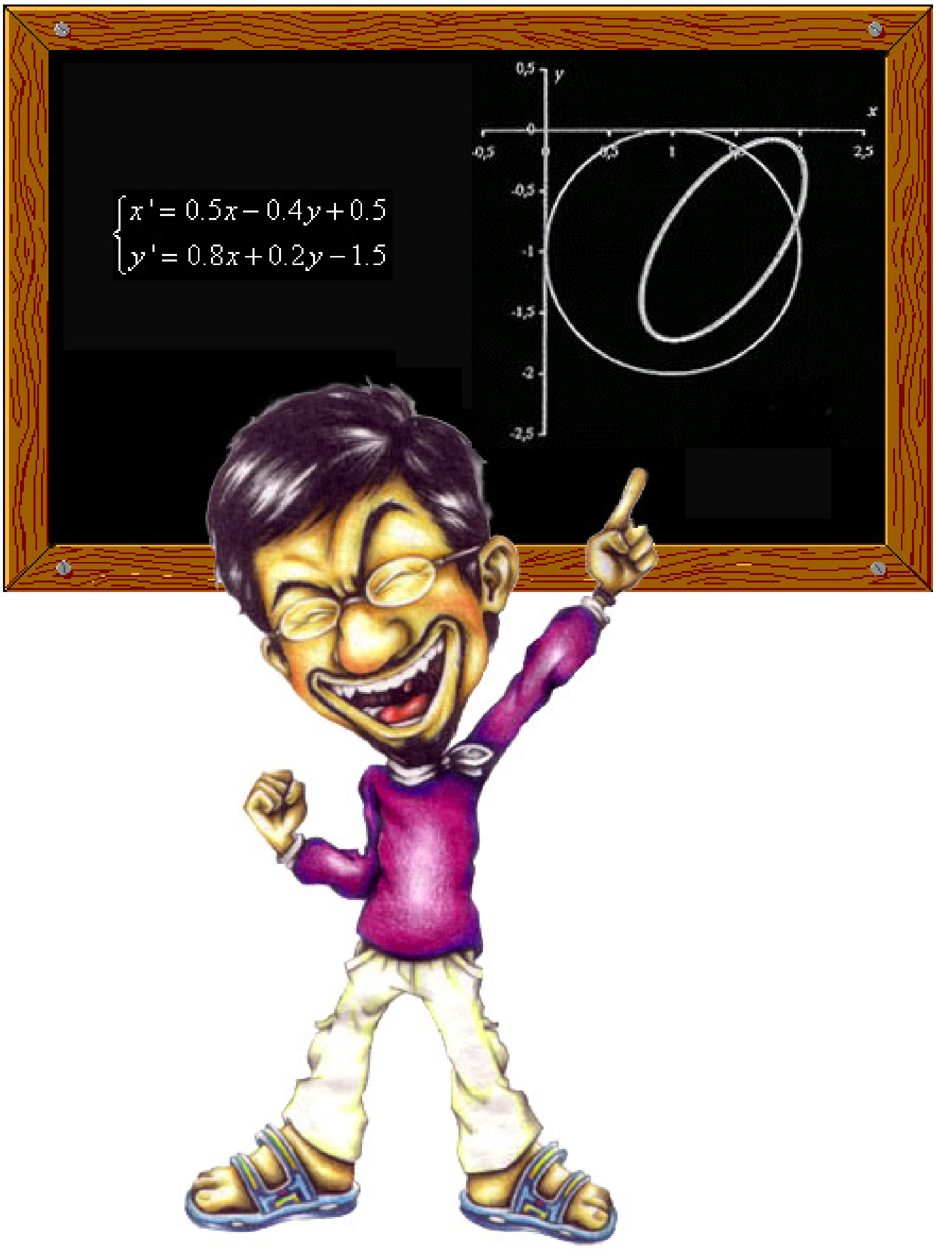
Algèbre Linéaire



Didier Müller, juin 2020

www.apprendre-en-ligne.net

Table des matières

8. Applications en sciences

9. Applications en géométrie

1. Systèmes d'équations

1.1. Systèmes d'équations linéaires

Un système d'équations **linéaires** est composé de plusieurs équations du type :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

où a_i et b sont des nombres réels et les x_i sont les **inconnues** (aussi appelées **variables**).

Exemple

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 3x_1 - 5.4\,x_2 - x_3 & = & 3.4 \\ (2) & x_1 + \;\; 2\,x_2 \qquad & = & 0 \\ (3) & x_2 + x_3 & = & -2 \end{array}$$

C'est un système de trois équations à trois inconnues.

Résolution

Pour résoudre un tel système, on dispose de deux opérations :

1. la **substitution** d'une inconnue par une autre ou par une valeur ;
2. l'**addition d'un multiple d'une ligne au multiple d'une autre ligne**. Les coefficients multiplicatifs devront être choisis de façon à obtenir une nouvelle équation où au moins une inconnue aura été **éliminée**.

L'opération 2 est appelée **combinaison linéaire**.

Nous allons faire un exemple complet mettant en œuvre ces deux opérations.
Résolvons :

Remarque
Quand les inconnues sont peu nombreuses, on utilise volontiers les lettres x, y, z.

$$\begin{array}{lrrrcr} (1) & 2x & -\;5y & +\;z & = & -10 \\ (2) & x & +\;2y & +\;3z & = & 26 \\ (3) & -3x & -\;4y & +\;2z & = & 5 \end{array}$$

Décidons d'éliminer la variable x en combinant des lignes (1) et (2).

(4) = (1)
(5) = -2·(2)
Addition des deux lignes.

$$\begin{array}{lrrrcr} (4) & 2x & -\;5y & +\;z & = & -10 \\ (5) & \underline{-2x} & \underline{-\;4y} & \underline{-\;6z} & \underline{=} & \underline{-52} \\ (6) & & -\;9y & -\;5z & = & -62 \end{array}$$

Il faut maintenant une deuxième équation avec y et z comme variables.

(7) = 3·(2)
(8) = (3)
Addition des deux lignes.

$$\begin{array}{lrrrcr} (7) & 3x & +\;6y & +\;9z & = & 78 \\ (8) & \underline{-3x} & \underline{-\;4y} & \underline{+\;2z} & \underline{=} & \underline{5} \\ (9) & & 2y & +11z & = & 83 \end{array}$$

Nous avons réussi à éliminer x. Nous nous retrouvons maintenant avec un système de deux équations avec deux inconnues (y et z).

$$\begin{array}{lrrcr} (6) & -\;9y & -\;5z & = & -62 \\ (9) & 2y & +\;11z & = & 83 \end{array}$$

On peut éliminer la variable y en multipliant la ligne (6) par 2 et la ligne (9) par 9, puis en additionnant les deux.

$$\begin{array}{lrrcr} (10) & -18y & -\;10z & = & -124 \\ (11) & \underline{18y} & \underline{+\;99z} & \underline{=} & \underline{747} \\ & & 89z & = & 623 \\ & & z & = & 7 \end{array}$$

Nous avons trouvé la valeur de z. On peut substituer cette valeur dans l'équation (6) pour trouver la valeur de y.

$$(6) \quad -9y-5\cdot\underbrace{7}_{z}=-62 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{62-35}{9}=3$$

Enfin, en substituant les valeurs de y et z dans l'équation (2), on trouvera la valeur de x.

$$(2) \quad x+2\cdot\underbrace{3}_{y}+3\cdot\underbrace{7}_{z}=26 \quad \Rightarrow x = 26-6-21=-1$$

La solution est : $x = -1$, $y = 3$ et $z = 7$.

Prenez l'habitude de vérifier vos solutions en introduisant les valeurs trouvées dans <u>toutes</u> les équations du système de départ.

Remarques

1. Il n'y a pas de règles précises pour décider s'il faut faire une combinaison de lignes plutôt qu'une substitution ; il faut essayer l'opération qui paraît la plus simple.

2. Faites de même pour choisir les lignes à combiner : choisissez celles qui demandent le moins d'effort.

3. Attention de ne pas tourner en rond ! Décidez quelle variable éliminer et ne changez pas d'avis avant qu'elle ait disparu.

4. On ne trouve pas toujours une solution ; des équations sont parfois contradictoires. Par exemple :

Si on soustrait les deux lignes, on obtient 0 = 1.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Il n'y a pas non plus de solutions quand il y a plus d'équations indépendantes que d'inconnues. On dit que le système est **surdéterminé**.

Une équation **indépendante** ne peut pas être obtenue en combinant d'autres équations du système.

5. Il y a une infinité de solutions quand il y a plus d'inconnues que d'équations indépendantes : le système est dit **sous-déterminé**. Par exemple :

En combinant les deux lignes, on obtient 0 = 0.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Dans ce cas, il y a une infinité de solutions. Pour exprimer l'ensemble des solutions, on peut **choisir** la valeur d'une variable arbitrairement, et la valeur de l'autre sera déterminée d'après la valeur de la première :

Avoir une infinité de solutions ne signifie pas que tout est solution !

$x = \lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$
De la première ligne, on tire que $y = 1 - \lambda$

λ n'est pas une inconnue, mais un **paramètre**, c'est-à-dire une valeur que l'on peut choisir arbitrairement.

Soient n_i le nombre d'inconnues et n_e le nombre d'équations indépendantes. Le nombre $n = n_i - n_e$ est appelé **nombre de degrés de liberté**.

Si on a <u>deux</u> degrés de liberté, on peut choisir les valeurs de <u>deux</u> variables comme on veut. Dans l'exemple ci-dessus, $n = 2 - 1 = 1$ degré de liberté.

Exercice 1.1

Résolvez les systèmes linéaires suivants :

a. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 3y = -2 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x - 2y = x + 4 \\ -1 + y = -5x + 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + 4y = -2x - 1 \\ -6x - y = 2 + 7y \end{cases}$

Exercice 1.2

a. $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ -x - y + 2z = 10 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - 3y + z = x \\ -x - y - 5z = 2 \\ x + 2y + 3z = -1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} -x + 2z = 3 \\ y + z = -1 \\ 2x + y - 3z = -7 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + y = 3 \\ -2x + 2y = y \\ x = 4 \end{cases}$

Exercice 1.3

Un camion transporte 20 caisses de masse différente : les rouges pèsent 28 kilos, les bleues 16 kilos. Le chauffeur a pesé son chargement avant de partir : il avait un poids total de 416 kilos.
Combien y a-t-il de caisses de chaque couleur dans le camion ?

Exercice 1.4

Des amis mangent ensemble au restaurant. Au moment de payer l'addition, l'un d'entre eux fait le partage :
« Il faut donner 21 € chacun ! »
« Mais non ! », répond un autre, « il manquera 10,50 € sur le total. Donnons plutôt 25 € chacun ! »
« Alors, cette fois-ci cela fera trop : une différence en plus de 17,50 € sur le total », répond le premier.

Combien y a-t-il de convives et combien devront-ils payer chacun ?

Exercice 1.5

Résolvez et discutez le système suivant en fonction du paramètre m.

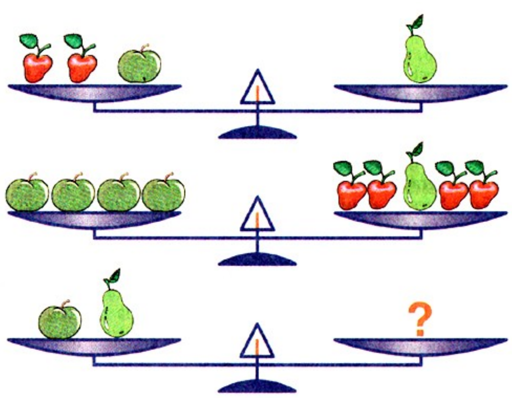
m n'est pas une inconnue !

$$\begin{cases} m^2x + y = 2 \\ x + y = 2m \end{cases}$$

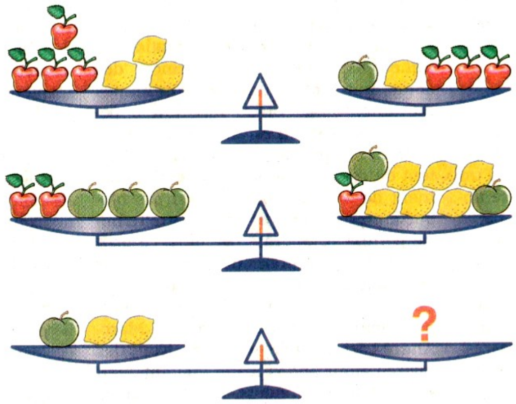
« Discuter » signifie repérer les valeurs de m où il se passe des choses « spéciales ».

Exercice 1.6 Combien faut-il de fraises pour équilibrer la troisième balance ?

a.



b.



1.2. Systèmes d'équations non linéaires

On est aussi amené à résoudre des systèmes d'équations qui ne sont pas (toutes) linéaires. Dans ce cas, la seule méthode de résolution qui fonctionne toujours est la **substitution** (on peut parfois manipuler les lignes, mais il faut être prudent).

Exemple Imaginons par exemple le système :

$$\begin{array}{ll} (1) & x^2 + y = 26 \\ (2) & x - y = 4 \end{array}$$

De (1) on peut tirer que $y = 26 - x^2$, et remplacer y dans l'équation (2) pour obtenir

$$x - \underbrace{(26 - x^2)}_{y} = 4$$

On obtiendra ainsi une équation du second degré que l'on sait résoudre facilement :

On aurait ici aussi pu calculer (1) + (2). On aurait retrouvé l'équation ci-contre.

$$x^2 + x - 30 = 0$$

On peut factoriser :

$$(x - 5)(x + 6) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5, \; x_2 = -6$$

Pour trouver les valeurs de y, il suffit de reprendre la relation $y = 26 - x^2$, et on trouve $y_1 = 26 - 25 = 1$ et $y_2 = 26 - 36 = -10$.

Exercice 1.7 Résolvez : $\begin{cases} (x + 2y)(x - y) & = & 0 \\ 2x - 5y & = & 1 \end{cases}$

Exercice 1.8

a. Trouvez deux entiers consécutifs dont le produit vaut 210.
b. Trouvez deux entiers dont la somme est 26 et le produit 165.

1.3. Ce qu'il faut absolument savoir

Reconnaître un système d'équations linéaires ❏ ok
Maîtriser les opérations sur les lignes d'un système d'équations linéaires ❏ ok
Maîtriser les substitutions ❏ ok

2. Déterminants

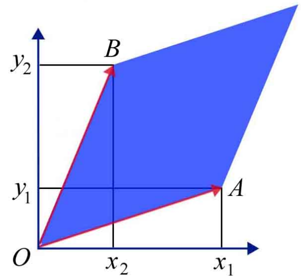
2.1. Définition

C'est Lewis **Carrol** (l'auteur d'*Alice aux pays des merveilles*), de son vrai nom Charles Lutwidge **Dodgson**, qui écrivit le premier ouvrage didactique sur les déterminants, en 1870.

On appelle **déterminant d'ordre deux**, et on note $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$, le nombre $x_1y_2 - x_2y_1$.

Ainsi $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 18$, mais $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 4 \cdot 5 = -18$.

Dans un plan repéré d'origine O, considérons deux points A et B de coordonnées (x_1, y_1) et (x_2, y_2). L'aire du parallélogramme construit sur OAB vaut exactement $x_1y_2 - x_2y_1$. **Démontrez-le à l'aide d'un dessin** (solution à la dernière page de ce chapitre) !



On constate qu'en inversant les deux colonnes, on trouve le résultat opposé. Le déterminant d'ordre deux peut donc être interprété comme une aire **signée**.
On peut facilement voir que le déterminant est nul si les trois points O, A et B sont alignés.

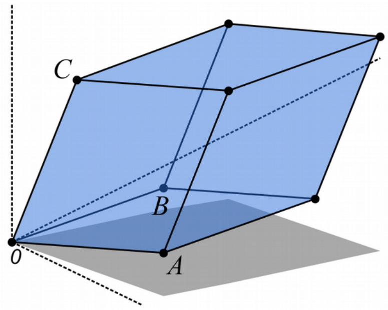
Exercice 2.1

Calculez les déterminants suivants :

a. $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$ **c.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$ **d.** $\begin{vmatrix} 2 & -10 \\ 3 & -15 \end{vmatrix}$

Joseph-Louis **Lagrange** (1736 - 1813)

Dans l'espace à trois dimensions, **Lagrange** avait réussi à montrer que le volume du parallélépipède construit sur le parallélépipède $OABC$ pouvait lui aussi s'exprimer en fonction des coordonnées des points A, B et C.



Voici l'expression qu'il avait trouvée pour ce volume :

$$V = x_1 y_2 z_3 + y_1 z_2 x_3 + z_1 x_2 y_3 - y_1 x_2 z_3 - x_1 z_2 y_3 - z_1 y_2 x_3$$

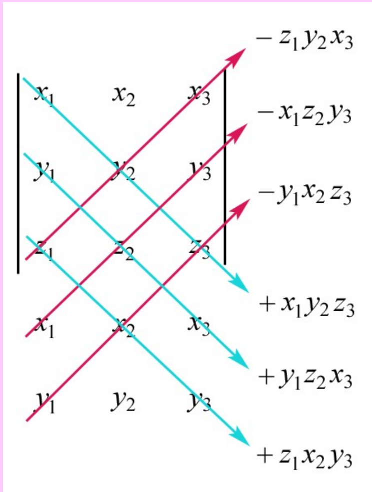
Plus tard, vers 1850, on décida de noter ce nombre comme ceci :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

C'est un **déterminant d'ordre trois**.

Règle de Sarrus

La formule pour calculer un déterminant d'ordre 3 est difficile à retenir. La règle de Sarrus permet d'éviter de l'apprendre par cœur.
On recopie sous le déterminant les deux premières lignes, puis on trace des diagonales selon le schéma suivant :



Pierre Frédéric **Sarrus**
(1798–1861)

Attention ! La règle de Sarrus ne marche **que** pour des déterminants d'ordre trois.

On multiplie ensuite les produits des nombres sur ces six diagonales.
Enfin, on additionne les produits des diagonales qui « descendent » et on soustrait les produits des diagonales qui « montent ».

Exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & -5 & 4 \\ 6 & -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & -5 & 4 \end{matrix} = 1\cdot(-5)\cdot 2 + (-3)(-2)(-3) + 6\cdot 2\cdot 4 - (-3)\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot(-2)\cdot 4 - 6\cdot(-5)(-3)$$

$$= -50$$

Exercice 2.2

Calculez les déterminants suivants avec la règle de Sarrus :

a. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ **c.** $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 13 & 6 \end{vmatrix}$

Méthode générale

Cette méthode est très mauvaise du point de vue du nombre d'opérations. En effet, pour un déterminant 2x2, il y a 2 produits et une addition.
3x3 : 6 produits et 5 additions
4x4 : 24 produits et 23 additions
nxn : *n*! produits et *n*! - 1 additions.

Pour un déterminant 15x15, il faut environ $2\cdot 15! = 2.6\cdot 10^{12}$ opérations. Si une opération dure 10^{-6} seconde, il faudra 30 jours pour le calculer...

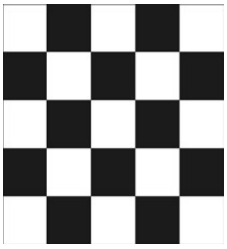
Un déterminant 3x3 est le produit des éléments de la première colonne, multiplié par le déterminant 2x2 obtenu en supprimant cette première colonne et la ligne contenant l'élément considéré.
Attention ! Le produit obtenu est précédé d'un signe qui alterne entre « + » et « – ».

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & \cancel{b} & \cancel{c} \\ \cancel{d} & e & f \\ \cancel{g} & h & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cancel{a} & b & c \\ d & \cancel{e} & \cancel{f} \\ \cancel{g} & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cancel{a} & b & c \\ \cancel{d} & e & f \\ g & \cancel{h} & \cancel{i} \end{vmatrix}$$

$$= a(ei - hf) - d(bi - hc) + g(bf - ec)$$

On peut comparer ce tableau de signes à un échiquier, où les « + » seraient les cases blanches et les « – » les cases noires.



On peut développer un déterminant par rapport à n'importe quelle ligne, ou n'importe quelle colonne.

Pour simplifier les calculs, il est bon d'avoir en tête ce tableau de signes :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots & \dots & \dots & (-1)^{n+1} \\ - & + & - & \dots & & & \vdots \\ + & - & + & & (-1)^{i+j} & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & + & - \\ (-1)^{n+1} & \dots & & & \dots & - & + \end{vmatrix}$$

Exemple Développons ce déterminant par rapport à la première colonne.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)\cdot\left((-1)\cdot\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}\right)$$

$$-2\cdot\left(2\cdot\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}\right)$$

$$+1\cdot\left(2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right)$$

$$-\left(2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) =$$

$$(-1)\cdot((-1)(-3)-4\cdot 1+1\cdot 5)$$
$$-2\cdot(2(-3)-4\cdot 0+1\cdot(-6))$$
$$+1\cdot(2\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot 2)$$
$$-(2\cdot 5+1(-6)+4\cdot 2) =$$

$$-4+24+4-12=12$$

Même exemple Reprenons l'exemple précédent et développons ce déterminant par rapport à la troisième colonne.

Il est intéressant de choisir une ligne ou une colonne qui contient beaucoup de 0, afin d'accélérer les calculs.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

On voit qu'en choisissant bien comment développer, on peut s'épargner beaucoup de calculs.

$$(-1)\left((-1)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}\right) - 3\left((-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= (-1)(-5-4+6) - 3(3-8+2) = 3+9 = 12$$

Exercice 2.3 Recalculez les déterminants de l'exercice 2.2 en les développant par rapport à une ligne ou à une colonne.

Exercice 2.4 Calculez les déterminants suivants :

a. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ **c.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

2.2. Quelques propriétés des déterminants

Voici quelques propriétés des déterminants particulièrement utiles (il y en a bien d'autres). Elles s'appliquent aux déterminants de tous les ordres, mais nous utiliserons des déterminants d'ordre trois pour illustrer le propos.

Cette propriété a pour conséquence que l'on peut lire « ligne » à la place de « colonne » dans toutes les propriétés qui suivent.

1. En échangeant le rôle des lignes et des colonnes, le déterminant reste inchangé :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

2. En échangeant **deux** colonnes d'un déterminant, le déterminant change de signe :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

3. Si deux colonnes sont identiques ou multiples l'une de l'autre, le déterminant est nul :

Un cas particulier est $\lambda = 0$. Cela fait apparaître une colonne formée uniquement de 0.

$$\begin{vmatrix} a_1 & \lambda a_1 & c_1 \\ a_2 & \lambda a_2 & c_2 \\ a_3 & \lambda a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

4. Les déterminants sont linéaires relativement à chacune de leurs colonnes.

$$\begin{vmatrix} a_1 & \lambda b_1 + \mu c_1 & d_1 \\ a_2 & \lambda b_2 + \mu c_2 & d_2 \\ a_3 & \lambda b_3 + \mu c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Conséquence (que vous démontrerez facilement) :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \lambda a_1 + \mu b_1 \\ a_2 & b_2 & \lambda a_2 + \mu b_2 \\ a_3 & b_3 & \lambda a_3 + \mu b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 2.5 Soient une droite orientée (AB) et un point C. Imaginez une méthode, utilisant les déterminants, qui permette de déterminer si le point C est à droite ou à gauche de la droite (AB). Autrement dit, en allant de A vers B, voit-on C à notre droite ou à notre gauche ?

Applications numériques :
a. $A(1 ; 1)$, $B(5 ; 7)$, $C(4 ; 6)$
b. $A(–1 ; 4)$, $B(4 ; –3)$, $C(2 ; –1)$
c. $A(–1 ; –1)$, $B(3 ; 7)$, $C(2 ; 5)$

Indication : rappelez-vous qu'un déterminant d'ordre 2 peut être interprété comme une aire **signée**.

2.3. Formules de Cramer

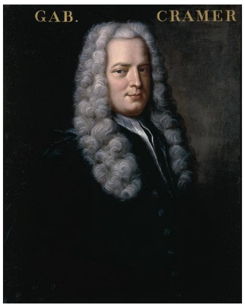
Théorème 1

Soit le système d'équations linéaires suivant : $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$ (1)

Si $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, le système (1) a pour solution unique le couple (*x* ; *y*) tel que :

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} , \quad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \qquad \textbf{(formules de Cramer)}$$

Si $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, le système (1) peut ne pas avoir de solution ou avoir une infinité de solutions.



Gabriel **Cramer**
(1704 -1752)

En utilisant la notation des déterminants, les formules de Cramer s'écrivent :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} . \quad \text{Si } D \neq 0 \text{, alors } x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{D} , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{D}$$

Exercice 2.6

Résolvez les systèmes suivants en utilisant les formules de Cramer quand c'est possible.

Quand ce n'est pas possible, utilisez une autre méthode.

a. $\begin{cases} 4x - y = -6 \\ 2x + 2y = 7 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 6 - 6y = -x \\ 3x - 3 = 4y \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 7 \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$

Théorème 2

Soit le système d'équations linéaires suivant : $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$ (2)

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ est son déterminant principal.}$$

Si $D \neq 0$, le système (2) admet pour solution unique le triplet (*x* ; *y* ; *z*) tel que :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{D}$$

Si $D = 0$, le système (2) peut ne pas avoir de solution ou avoir une infinité de solutions.

Pour se souvenir facilement de ces formules, il suffit de remarquer que, au numérateur, on remplace dans le déterminant principal la colonne de l'inconnue par la colonne des constantes.

Exercice 2.7

Résolvez les systèmes suivants en utilisant les formules de Cramer, quand c'est possible. Quand ce n'est pas possible, utilisez une autre méthode.

a. $\begin{cases} x + 3y + 2z = -13 \\ 2x - 6y + 3z = 32 \\ 3x - 4y - z = 12 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} -6 - 3y + 2z = -2x \\ x + 3z + 8y = -31 \\ 3x - 2y + z = -5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y - z = -1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ -4y + z = 0 \\ 4x + z = 6 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x - y + 2z = -2 \\ 5x - 9y + 14z = 3 \end{cases}$ **f.** $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ -5x - 5y - 5z = -5 \end{cases}$

2.4. Ce qu'il faut savoir absolument

Calculer des déterminants d'ordre 2 ❑ ok
Calculer des déterminants d'ordre 3 avec la règle de Sarrus ❑ ok
Développer des déterminants d'ordre 3 ou plus selon une ligne ou une colonne ❑ ok
Connaître les propriétés des déterminants ❑ ok
Résoudre un système d'équations avec les formules de Cramer ❑ ok

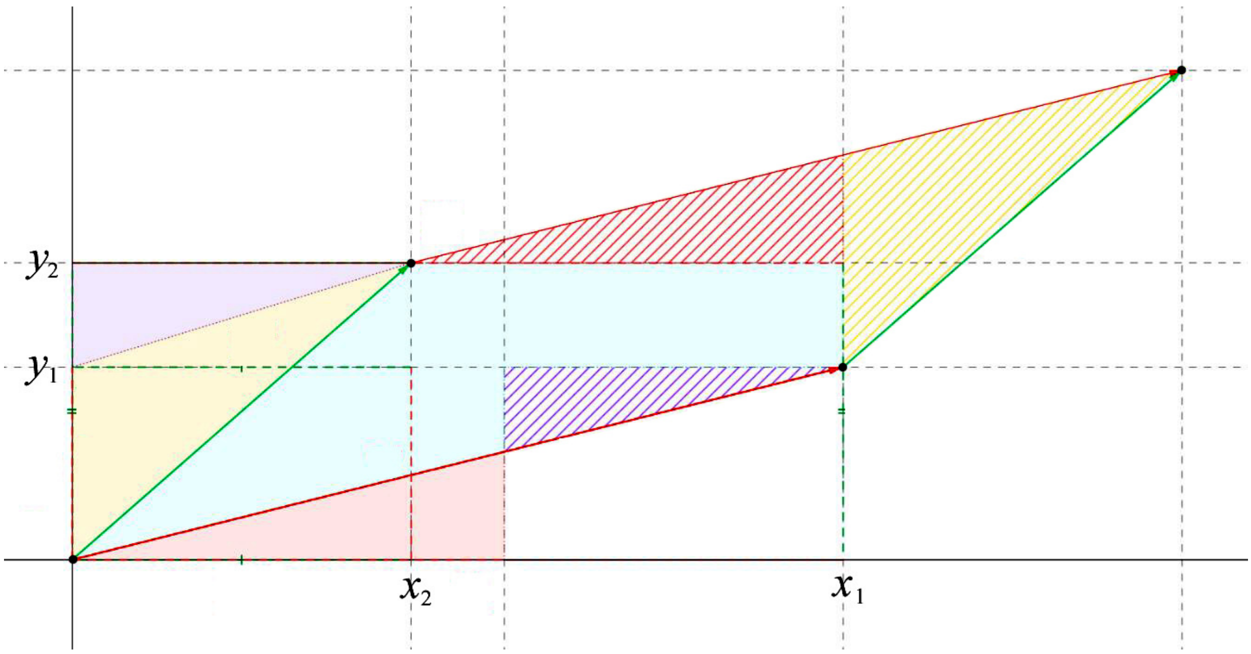


Illustration qu'un déterminant d'ordre deux donne l'aire d'un parallélogramme.
L'aire vaut bien $x_1 y_2 - x_2 y_1$.

3. Introduction à la programmation linéaire

La programmation linéaire est une branche de l'optimisation permettant de résoudre de nombreux problèmes économiques et industriels.

3.1. L'artisan chocolatier

Remarque
Le chocolat est composé de beaucoup plus d'ingrédients (notamment du sucre), mais, pour la clarté de l'exemple, on s'est ici limité à trois.

À l'approche des fêtes de Pâques, un artisan chocolatier décide de confectionner des œufs en chocolat. En allant inspecter ses réserves, il constate qu'il lui reste 18 kg de cacao, 8 kg de noisettes et 14 kg de lait.
Il a deux spécialités : l'œuf *Extra* et l'œuf *Sublime*. Un œuf *Extra* nécessite 1 kg de cacao, 1 kg de noisettes et 2 kg de lait. Un œuf *Sublime* nécessite 3 kg de cacao, 1 kg de noisettes et 1 kg de lait.
Il fera un profit de 20 fr. en vendant un œuf *Extra*, et de 30 fr. en vendant un œuf *Sublime*.
Combien d'œufs *Extra* et *Sublime* doit-il fabriquer pour faire le plus grand bénéfice possible ?

Formulation du problème

Notons x_1 le nombre d'œufs *Extra* et x_2 le nombre d'œufs *Sublime* à produire. Le chocolatier cherche à **maximiser** la **fonction objectif** :

C'est l'expression du bénéfice.

$$\max \quad z = 20x_1 + 30\,x_2$$

L'artisan ne peut pas utiliser plus de :
18 kg de cacao
8 kg de noisettes
14 kg de lait.

Étant données les réserves du chocolatier, les **contraintes** suivantes devront être satisfaites :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \end{cases}$$

Il ne peut pas produire un nombre négatif d'œufs !

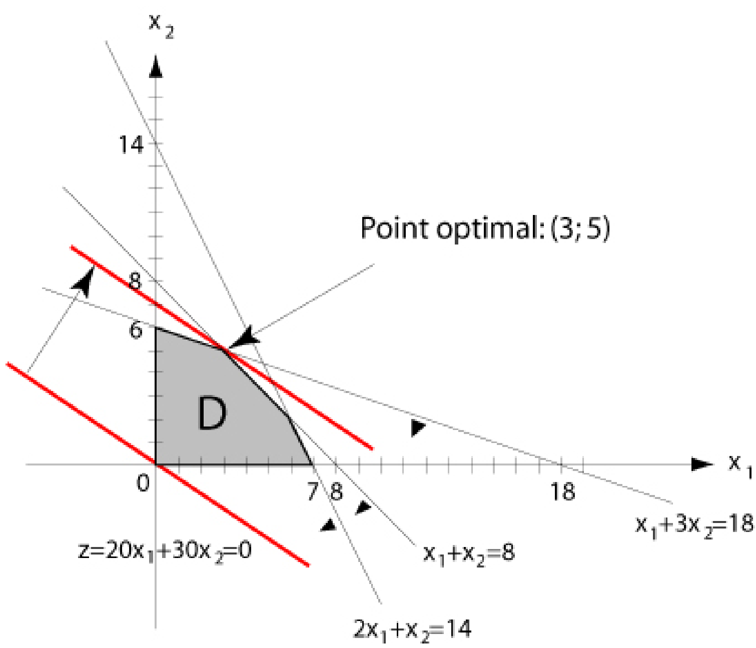
Évidemment, on a encore les deux contraintes : $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$.

Une inéquation définit un **demi-plan** où la condition est satisfaite.

Démarche

1. On dessine les demi-plans des contraintes. On trace la **droite frontière** et on indique par un petit triangle le demi-plan défini par l'inéquation (la droite frontière est obtenue en remplaçant ≤ par =).
2. On détermine le domaine D définissant l'ensemble des points satisfaisant toutes les contraintes. Le domaine D est l'intersection de tous les demi-plans.
3. On trace la droite représentant la fonction objectif et passant par l'origine.
4. On translate la droite de la fonction objectif selon son **vecteur normal**, ici (20, 30).
5. Le point optimal est le dernier point du domaine D que la droite de la fonction objectif touchera lors de son déplacement.

Résolution graphique



Truc pour repérer rapidement le bon demi-plan défini par une inéquation : regarder si le point (0 ; 0) est du bon côté de la droite frontière.

Réponse au problème

Le point optimal est (3 ; 5), ce qui signifie que $x_1 = 3$ et $x_2 = 5$.
S'il veut maximiser son bénéfice, le chocolatier doit donc confectionner 3 œufs *Extra* et 5 œufs *Sublime*.
Son bénéfice sera de $20 \cdot 3 + 30 \cdot 5 = 210$ fr.
Il utilisera 18 kg de cacao, 8 kg de noisettes et 11 kg de lait.

Remarques générales

Une autre méthode (plus sûre mais plus longue) pour trouver le point optimal consisterait à tester tous les sommets et garder le meilleur.

1. Dans cet exemple introductif, le résultat est en nombres entiers, ce n'est de loin pas toujours le cas.
2. On constate que le chocolatier va utiliser complètement deux de ces trois ingrédients.
3. Seuls les couples $(x_1 ; x_2) \in D$ satisfont toutes les contraintes. Mais en fait, la solution optimale sera **toujours** l'un des sommets du polygone délimitant le domaine *D*.
4. Faites un dessin suffisamment grand pour être précis. Ne le placez pas tout en bas de votre feuille, car vous serez embêté pour dessiner la droite de la fonction objectif.
5. Le vecteur normal de la droite définissant la fonction objectif indique le sens dans lequel on doit la translater pour trouver le point optimal.

   Il se trouve facilement : la droite $ax_1 + bx_2 + c$ a pour vecteur normal $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
6. Si le vecteur normal indique un **déplacement vers le haut**, la fonction objectif doit couper l'axe Ox_2 le plus haut possible dans le cas d'une maximisation, et le plus bas possible dans le cas d'une minimisation, tout en touchant le domaine *D*.
7. Si le vecteur normal indique un **déplacement vers le bas**, la fonction objectif doit couper l'axe Ox_2 le plus bas possible dans le cas d'une maximisation, et le plus haut possible dans le cas d'une minimisation, tout en touchant le domaine *D*.
8. Si le vecteur normal est un **vecteur horizontal** (cas rare mais possible), la fonction objectif ne coupera pas l'axe Ox_2. Le point optimal sera, selon les cas, le plus éloigné ou le plus proche de l'axe Ox_2.

3.2. Exercices

Pour chacun des exercices, donnez la fonction objectif à maximiser ou à minimiser, énumérez toutes les contraintes, déterminez graphiquement la solution et calculez-la algébriquement.

Exercice 3.1

Une entreprise suisse fabrique deux produits qu'elle désire vendre aux USA.
Le produit *A* rapporte 400 fr./kg et le produit *B* rapporte 600 fr./kg.
Ayant des moyens financiers limités, la société ne peut affréter qu'un seul avion. Celui-ci ne peut transporter que 50'000 kg et a un volume de 2000 m^3.
Le produit *A* a un volume de 0.032 m^3 par kg ; le produit *B* a un volume de 0.1 m^3 par kg.
Combien de kg de chaque produit l'entreprise doit-elle mettre dans l'avion afin de maximiser ses gains ?

Exercice 3.2

Pour produire des pièces de fonte, une entreprise dispose d'une fonderie et d'un atelier de mécanique. On donne le tableau des consommations suivant :

	Fonderie	Atelier	Énergie	Recette par tonne
Une tonne de pièces de type 1	10 h	5 h	14 kWh	2000 fr.
Une tonne de pièces de type 2	12 h	4 h	30 kWh	3000 fr.
Quantités disponibles	100 h	45 h	210 kWh	–

Combien de tonnes de pièces de chaque type faut-il fabriquer pour maximiser la recette ?

Exercice 3.3

Une menuiserie s'est spécialisée dans la fabrication de boîtes en bois. En prévision d'une grosse commande, elle décide de remplir ses stocks.
Un ouvrier produit de grandes boîtes rouges et un autre de petites boîtes jaunes.
Chaque boîte rouge a un volume de 20 dm^3, chaque boîte jaune a un volume de 10 dm^3.
L'armoire prévue pour stocker les boîtes a un volume de 4000 dm^3.
Pour des raisons techniques, le premier ouvrier ne peut produire au maximum que 150 boîtes rouges et le deuxième que 200 boîtes jaunes.
Sachant que les boîtes rouges rapportent 80 fr. et les boîtes jaunes 30 fr., combien la menuiserie doit-elle fabriquer de boîtes rouges et de boîtes jaunes pour maximiser son profit ?

Exercice 3.4

Un fabricant de raquettes de tennis fait un bénéfice de 8 fr. sur chaque raquette ordinaire et de 15 fr. sur chaque grande raquette. Pour satisfaire à la demande des vendeurs, la production journalière de raquettes ordinaires devrait se situer entre 30 et 80, et la production journalière de grandes raquettes entre 10 et 30. Pour maintenir une bonne qualité, le nombre total de raquettes produites ne devrait pas dépasser 80 par jour.
Combien de raquettes de chaque type faudrait-il fabriquer quotidiennement pour réaliser un bénéfice maximum ?

Exercice 3.5

Pour nourrir sa vache, un paysan dispose de deux poudres alimentaires P_1 et P_2 composées d'ingrédients *A, B* et *C*.
Un sac de poudre P_1 pèse 900 g et contient 100 g d'ingrédients *A*, 200 g de *B* et 600 g de *C*.
Un sac de poudre P_2 pèse 600 g et contient 200 g de chacun des trois ingrédients.
Chaque jour, la vache doit consommer au moins 300 g de *A*, 500 g de *B* et 700 g de *C*.
Les prix respectifs par kg de P_1 et P_2 sont respectivement 3 fr. et 2 fr.
Quelle dépense journalière minimale le paysan doit-il envisager, de sorte que sa vache reçoive une nourriture suffisante ?

Exercice 3.6

Un teinturier dispose de deux différents produits sous forme de poudre pour colorer du tissu brut en couleur indigo. Ces deux produits, IND_1 et IND_2, contiennent trois substances différentes.
La substance A est contenue à raison de 500 g par kg de poudre dans IND_1 et à raison de 400 g par kg de poudre dans IND_2.
La substance B est contenue à raison de 150 g par kg de poudre dans IND_1 et à raison de 50 g par kg de poudre dans IND_2.
La substance C n'est contenue que dans le produit IND_1 et ceci à raison de 20 g par kg.
Dans un bain qui permet de teinter 10 kg de tissu, il faut au moins 500 g de la substance A, 100 g de B et 5 g de C. De plus, la quantité de substance C ne doit pas dépasser 15 g par bain.
Sachant que le produit IND_1 coûte 20.- par kg et que le produit IND_2 coûte 40.- par kg, quel est le prix minimal que le teinturier devra payer pour pouvoir colorer 10 kg de tissu ?

Exercice 3.7

Un distributeur de lecteurs de DVD a deux entrepôts E_1 et E_2. Il y a 80 unités entreposées à E_1 et 70 unités à E_2. Deux clients, A et B, commandent respectivement 35 et 60 unités. Les coûts de transport à partir de chaque entrepôt jusque chez A et B sont déterminés en fonction du tableau ci-dessous :

Entrepôt	Client	Coût de transport par unité
E_1	A	8 fr.
E_1	B	12 fr.
E_2	A	10 fr.
E_2	B	13 fr.

Comment répartir la commande pour que le coût de transport soit minimum ?

Exercice 3.8

Trois substances X, Y et Z contiennent chacune quatre ingrédients A, B, C et D. Le pourcentage de chaque ingrédient et le coût, en centimes par gramme, de chaque substance sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

Substance	Ingrédients				Coût par gramme
	A	***B***	***C***	***D***	
X	20 %	10 %	25 %	45 %	25 ct.
Y	20 %	40 %	15 %	25 %	35 ct.
Z	10 %	20 %	25 %	45 %	50 ct.

a. Si le coût doit être minimal, combien de grammes de chaque substance faudrait-il amalgamer pour obtenir un mélange de 20 grammes contenant au moins 14 % de A, 16 % de B et 20 % de C ?
b. Quel serait le mélange le plus coûteux ?

Exercice 3.9

Peut-il y avoir plusieurs solutions optimales à un problème de programmation linéaire ?
Si oui, quand cela arrive-t-il ?
Si non, pourquoi cela ne peut-il pas arriver ?

3.3. Ce qu'il faut absolument savoir

Poser et résoudre graphiquement un problème d'optimisation linéaire ❏ ok

4. Matrices

4.1. Définition

Voici une matrice 3×2 :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1.5 & -2 \end{pmatrix}$$

On appelle **matrice de type *m* × *n*,** avec m et n entiers strictement positifs, un ensemble de nombres réels disposés dans un tableau rectangulaire à m lignes et n colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Les nombres a_{ij} (i : numéro de la ligne, j : numéro de la colonne) situés dans le tableau sont appelés les **coefficients**.

Quand aucune confusion n'est possible concernant le nombre de lignes et de colonnes de la matrice A, on note $A = (a_{ij})$.

L'ensemble des matrices de type $m \times n$ à coefficients réels se note $M_{m\times n}$. On note M_n l'ensemble de toutes les matrices **carrées** à coefficients réels possédant n lignes et n colonnes.

4.2. Opérations

Somme de deux matrices Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de dimensions $m \times n$. On appelle **somme** de A et B la matrice de type $m \times n$ définie par $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 9 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Remarquez qu'il faut que les matrices soient de mêmes dimensions.

Multiplication par un scalaire Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de dimensions $m \times n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle **produit de la matrice *A* et de λ** la matrice $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 10 & -5 & 15 \end{pmatrix}$$

Produit de deux matrices Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de type $m \times n$ et $B = (b_{jk})$ une matrice de dimensions $n \times r$. Le **produit de *A* par *B***, noté $A{\cdot}B$, est la matrice $C = (c_{ik})$ de dimensions $m \times r$ avec :

c_{ik} est le produit scalaire de la i-ème ligne de A avec la k-ème colonne de B.

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \ldots + a_{in} b_{nk}$$

Pour effectuer le produit $C = A{\cdot}B$, il faut donc que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B. La matrice C a le même nombre de lignes que A et le même nombre de colonnes que B.

Exemple Calculons coefficient par coefficient le produit $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$:

Une matrice 2×2 multipliée par une matrice 2×3 donnera une matrice 2×3.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ . & . \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & . & . \\ 2 & . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ . & . \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} . & 1 & . \\ . & -1 & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & -3 & . \\ . & . & . \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&5\\ \cdot&\cdot\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&2\\ \cdot&\cdot&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&19\\ \cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\cdot&\cdot\\ 7&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\cdot&\cdot\\ 2&\cdot&\cdot\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\ 15&\cdot&\cdot\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\cdot&\cdot\\ 7&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cdot&1&\cdot\\ \cdot&-1&\cdot\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&3&\cdot\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\cdot&\cdot\\ 7&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&2\\ \cdot&\cdot&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&26\end{pmatrix}$$

Finalement, $\begin{pmatrix}2&5\\ 7&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&2\\ 2&-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&-3&19\\ 15&3&26\end{pmatrix}$.

Attention !

Le produit de deux matrices **n'est pas commutatif.** En général, $A\cdot B\neq B\cdot A$ **.**
Si $A\cdot B = A\cdot C$, il n'est pas vrai en général que $B = C$.
Si $A\cdot B = 0$, on ne peut pas conclure en général que que $A = 0$ ou $B = 0$ (0 désigne ici une matrice où tous les coefficients sont nuls).

Exercice 4.1

Soient les matrices $A=\begin{pmatrix}1&4\\ 3&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&2\\ 2&-1&3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1&0\\ 2&1\\ -2&2\end{pmatrix}$

Calculez les produits suivants (si c'est possible) : $A\cdot B$, $A\cdot C$, $C\cdot A$, $B\cdot C$, $C\cdot B$, A^2, B^2

Propriétés

L'ensemble des matrices $m \times n$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire est un espace vectoriel (voir chapitre 5). Le neutre de l'addition est donné par la matrice carrée nulle :

C'est la matrice nulle. Tous les coefficients sont nuls.

$$\begin{pmatrix}0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

La diagonale principale d'une matrice carrée est la diagonale qui descend du coin en haut à gauche jusqu'au coin en bas à droite. Sauf avis contraire, quand on parlera de « diagonale », il s'agira de la diagonale principale.

C'est la matrice identité, que l'on désigne toujours par la lettre I. Les coefficients a_{ii} valent 1, les autres sont nuls.
La matrice identité est un exemple de matrice diagonale.

Dans l'ensemble des matrices carrées $n \times n$, le neutre du produit est : $I_n=\begin{pmatrix}1&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&1\end{pmatrix}$

On appelle **matrice diagonale** une matrice carrée où tous les coefficients qui ne sont pas sur la diagonale principale sont nuls.

Élévation à une puissance

Il n'existe pas de formule pour élever une matrice carrée à une puissance. Le seul moyen est de calculer $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{n\text{ termes}}$.

Cependant, pour trouver la puissance n-ième d'une matrice *diagonale*, il suffit d'élever à la puissance n les coefficients de la diagonale, tous les autres coefficients restant nuls.

Transposition

Si $A = (a_{ij})$ est une matrice $m \times n$, on appelle **transposée** de A et on note ${}^tA$ la matrice dont la i-ème ligne est la i-ème colonne de A et la j-ème colonne est la j-ème ligne de A (on permute ligne et colonne).

La matrice ${}^tA = (a'_{ij})$ est donc une matrice $n \times m$ et $a'_{ij} = a_{ji}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$${}^t(A{\cdot}B) = {}^tB{\cdot}{}^tA$$

Inverse d'une matrice

Une matrice **carrée** A, d'ordre n, est dite **inversible**, s'il existe une matrice carrée B, d'ordre n, telle que :

$$A{\cdot}B = B{\cdot}A = I_n$$

La matrice B est alors appelée **matrice inverse** de la matrice A, elle est notée A^{-1}.

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n. On appelle **mineur** de a_{ij}, le déterminant D_{ij} de la matrice carrée A_{ij} d'ordre n–1 obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de la matrice A.

Exemple Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le mineur de a_{12} (2) vaut $D_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 9$.

Cofacteur On appelle **cofacteur** de l'élément a_{ij} le nombre $(-1)^{i+j}D_{ij}$.

Le cofacteur de a_{12} vaut $(-1)^{1+2} \cdot 9 = -9$.

Comatrice La **comatrice** C d'une matrice carrée A d'ordre n, est la matrice obtenue en remplaçant chaque élément a_{ij} de la matrice A par son cofacteur.

Exemple La comatrice de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est $C = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 2 \\ -2 & -1 & -4 \\ 7 & -6 & -5 \end{pmatrix}$.

Soit A une matrice carrée telle que Dét(A) ≠ 0. Alors : $A^{-1} = \dfrac{1}{\text{Dét}(A)}\,{}^tC$

Exemple

$$A^{-1} = \frac{-1}{19}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -9 & -1 & -6 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -7 \\ 9 & 1 & 6 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec Dét($A$) = $ad - bc \neq 0$.

La comatrice est $\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$, sa transposée est $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

La matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est donc $A^{-1} = \dfrac{1}{\text{Dét}(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Autre méthode pour calculer l'inverse d'une matrice

Les formules précédentes marchent bien pour des matrices de rang inférieur à 4. Au-delà de 3, il est préférable d'utiliser la **transformation de Gauss-Jordan :**

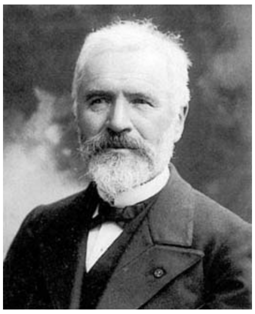
Former la matrice $(A \mid I)$ et effectuer sur les lignes de cette matrice augmentée les opérations élémentaires mettant A dans la forme échelonnée réduite. On obtient ainsi la matrice $(I \mid A^{-1})$.

On a évidemment supposé que A était inversible.

Par « opérations élémentaires », on entend :

- multiplication d'une ligne par un scalaire différent de 0,
- combinaison linéaire de deux lignes,
- permutation de deux lignes.

Exemple de calcul Cherchons la matrice inverse de $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{pmatrix}$.



Camille **Jordan**
(1838 - 1922)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&5&3&0&1&0\\1&0&8&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \ell_2-2\ell_1\\ \ell_3-\ell_1\end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&-2&5&-1&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \ell_3+2\ell_2\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&0&-1&-5&2&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ -\ell_3\end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&0&1&5&-2&-1\end{array}\right)\begin{array}{l}\ell_1-3\ell_3\\ \ell_2+3\ell_3\\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&-14&6&3\\0&1&0&13&-5&-3\\0&0&1&5&-2&-1\end{array}\right)\begin{array}{l}\ell_1-2\ell_2\\ \\ \\ \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-40&16&9\\0&1&0&13&-5&-3\\0&0&1&5&-2&-1\end{array}\right)$$

On a donc $A^{-1}=\begin{pmatrix}-40&16&9\\13&-5&-3\\5&-2&-1\end{pmatrix}$.

Exercice 4.2 Déterminez les inverses des matrices suivantes, en utilisant les deux méthodes présentés ci-dessus :

$$A=\begin{pmatrix}4&2\\9&5\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}3&2&-1\\1&6&3\\2&-4&0\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}1&4&-2\\-1&0&2\\1&-2&1\end{pmatrix}$$

Remarque du 21ème siècle Comme vous l'aurez constaté en faisant cet exercice, les calculs sont longs et sujets à erreurs. Aussi, dans la pratique, on calcule l'inverse d'une matrice par ordinateur. Certaines calculatrices scientifiques et des applis sur smartphone permettent aussi de calculer des inverses de matrices.

Quelques propriétés

Soit A une matrice carrée. A est inversible si et seulement si Dét(A) $\neq$ 0.

Soit A une matrice carrée inversible, alors $\text{Dét}(A^{-1})=\dfrac{1}{\text{Dét}(A)}$.

Soient A et B deux matrices carrées inversibles de mêmes dimensions. Alors $A\cdot B$ est inversible et $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$ **(attention à l'ordre).**

Soit A une matrice carrée inversible. ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

4.3. Ce qu'il faut absolument savoir

Calculer avec les matrices ❑ ok
Calculer l'inverse d'une matrice ❑ ok

5. Espaces vectoriels

5.1. Définition

Il s'agit dans ce chapitre de dégager les propriétés communes que partagent des ensembles pourtant très différents. Par exemple, on peut additionner deux vecteurs, et multiplier un vecteur par un réel. Mais on peut aussi additionner deux fonctions, ou multiplier une fonction par un réel. Idem pour les polynômes, les matrices, etc.
Le but est d'obtenir des théorèmes généraux qui s'appliqueront à tous ces ensembles.

Remarques

Attention ! Ce que l'on appelle ici **vecteur** peut être un nombre, une matrice, un polynôme, etc.

Un ensemble muni de l'addition et vérifiant les propriétés **i**, **ii**, **iii**, **iv** est appelé un *groupe commutatif* (ou *groupe abélien*).

On appelle **espace vectoriel réel** tout ensemble $E \neq \varnothing$ d'objets, appelés **vecteurs**, muni de deux lois de composition :

1) une **loi de composition interne** (notée « + »), qui, à tout couple $(x\,;y)$ de $E{\times}E$, fait correspondre un élément noté $x + y \in E$, et vérifie les propriétés suivantes pour tout $x, y, z \in E$:

- **i.** + est associative : $x + (y + z) = (x + y) + z$
- **ii.** + est commutative : $x + y = y + x$
- **iii.** il existe un élément neutre noté $n \in E$ tel que : $\begin{cases} x+n=x \\ n+x=x \end{cases}$
- **iv.** chaque élément $x \in E$ possède un symétrique $x' \in E$ tel que : $\begin{cases} x+x'=n \\ x'+x=n \end{cases}$

2) une **loi de composition externe** (noté « · »), qui à tout couple $(\lambda\,;x) \in \mathbb{R} \times E$ fait correspondre $\lambda \cdot x \in E$, et vérifie les propriétés suivantes pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $x, y \in E$:

- **v.** $\alpha(\beta \cdot x) = (\alpha\beta)\cdot x$
- **vi.** $1 \cdot x = x$
- **vii.** $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
- **viii.** $(\alpha + \beta)\cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

Exemples

Considérons l'ensemble E des fonctions f définies par : $f(x) = ax + b$ où a et b sont deux réels fixés. Munissons E d'une loi interne (l'addition) notée « + » telle que pour toutes fonctions f et g de E $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
Munissons aussi E d'une loi externe (la multiplication par un réel) notée « · » telle que pour tout réel λ et pour toute fonction f on a : $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$.
Nous allons montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1. **la loi + est bien interne :** soient f et g deux éléments de E, $f(x) = ax+b$ et $g(x) = cx+d$ où a, b, c, d sont quatre réels fixés.
   $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = ax+b+cx+d = (a+c)x+b+d$, donc $f + g$ appartient à E.
   - **i.** **la loi + est associative :** soient $f(x) = ax+b$, $g(x) = cx+d$, $h(x) = kx+m$ où a, b, c, d, k, m sont des réels fixés.
     $((f + g) + h)(x) = ... = (a+c+k)x + (b+d+m)$
     $(f + (g + h))(x) = ... = (a+c+k)x + (b+d+m)$
   - **ii.** **la loi + est commutative :** soient $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$, où a, b, c, d sont des réels fixés.
     $((f + g))(x) = ax + b + cx + d = (a+c)x + b + d$
     $((g + f))(x) = cx + d + ax + b = (a+c)x + b + d$
   - **iii.** **la loi admet un élément neutre :** la fonction nulle n est définie par $n(x) = 0x + 0 = 0$, pour tout élément f de E, $f + n = n + f = f$.
   - **iv.** **tout élément de E admet un symétrique pour la loi + :** soit f un élément de E, f définie par $f(x) = ax+b$, notons $-f$ l'élément défini par $(-f)(x) = -ax + (-b)$. On a : $f + (-f) = (-f) + f = n$.

2. **loi externe**
   v. **la loi · est associative :** soient $f(x) = ax+b$, où a, b sont des réels fixés.
   $\alpha(\beta\cdot(ax+b)) = \alpha(\beta ax+\beta b) = \alpha\beta ax + \alpha\beta b = (\alpha\beta)\cdot(ax+b)$
   vi. **la loi admet un élément neutre :**
   $1\cdot(ax+b) = ax+b$
   vii. **$\alpha\cdot(x+y) = \alpha\cdot x+\alpha\cdot y$:** soient $f(x) = ax+b$, $g(x) = cx+d$, où a, b, c, d sont des réels fixés.
   $\alpha(f(x)+g(x)) = \alpha((ax+b) + (cx+d)) = \alpha(ax+b) +\alpha(cx+d) = \alpha f(x)+\alpha g(x)$
   viii. **$(\alpha+\beta)\cdot x = \alpha\cdot x+\beta\cdot x$:** soient $f(x) = ax + b$, où a, b sont des réels fixés.
   $(\alpha+\beta)\cdot f(x) = (\alpha+\beta)(ax+b) = \alpha(ax+b) + \beta(ax+b) = \alpha f(x)+\beta\cdot f(x)$

Deux autres exemples d'espaces vectoriels

$E = \mathbb{R}^2$ = ensemble des paires de nombres réels.
Addition : $(x_1 ; y_1) + (x_2 ; y_2) = (x_1 + x_2 ; y_1 + y_2)$.
Multiplication par un réel : $\lambda\cdot(x ; y) = (\lambda x ; \lambda y)$.
Élément neutre : $(0 ; 0)$.

E = ensemble des polynômes à une variable de degré ≤ 2, appelé P_2.
Addition : $(ax^2 + bx + c) + (a'x^2 + b'x + c') = (a+a')x^2 + (b+ b')x + (c+c')$.
Multiplication par un réel : $\lambda\cdot(ax^2 + bx + c) = (\lambda a)x^2 + (\lambda b)x + (\lambda c)$.
Élément neutre : $0x^2 + 0x + 0 = 0$.

Exercice 5.1

Montrez que l'ensemble des matrices $M_{2,2}$, muni de l'addition matricielle et de la multiplication par un scalaire est un espace vectoriel.

Exercice 5.2

Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, on considère l'addition comme loi de composition interne et on définit la multiplication par un réel ainsi : $\lambda\cdot u = 0$, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ et $u\in\mathbb{Z}$
L'ensemble $\mathbb{Z}$, muni de ces deux lois, est-il un espace vectoriel ?

Exercice 5.3

Dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on considère les deux lois de composition suivantes :

$$(x ; y) + (x' ; y') = (x+x' ; y+y')$$

$$\lambda\cdot(x ; y) = (\lambda x ; y)$$

Montrez que $\mathbb{R}^2$, muni de ces deux lois, n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 5.4

Montrez que l'ensemble P_3 des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3, muni des opérations habituelles d'addition de polynômes et de multiplication d'un polynôme par un scalaire, est un espace vectoriel.

5.2. Sous-espaces vectoriels

Définition

Soit E un espace vectoriel et F un sous-ensemble non vide de E. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si F est aussi un espace vectoriel. Autrement dit, il faut que :

1) pour tout x, $y \in F$, la somme $x + y \in F$,
2) pour tout $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, le produit $\lambda\cdot x \in F$.

Exemple 1

$E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x ; 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ avec les opérations données dans l'exemple **a.** ci-dessus.
Si $(x ; 0)$, $(x' ; 0) \in F$, alors $(x ; 0) + (x' ; 0) = (x + x' ; 0) \in F$.
Si $(x ; 0) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda (x ; 0) = (\lambda x ; 0) \in F$.

Exercice 5.5

a. Soit l'ensemble $E_k = \{(x ; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = k\}$.

E_k est-il un espace vectoriel pour **1.** $k = 5$?
2. $k = 0$?

b. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

$$A = \{(x\,;y\,;z) \mid y = 3x\} \qquad B = \{(x\,;y\,;z) \mid 2x + y + z = 21\}$$

5.3. Combinaison linéaire et espace engendré

Soit $S = (e_1\,; e_2\,; \ldots\,; e_k)$ une famille de k vecteurs d'un espace vectoriel E. On appelle **combinaison linéaire** des k vecteurs de cette famille tout vecteur de la forme :

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_k e_k$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ sont les **coefficients** de la combinaison linéaire.

Exemple 2 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on considère deux vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Le vecteur $v = 2u_1 - 3u_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire des vecteurs u_1 et u_2.

Exemple 3 Dans l'espace vectoriel P_2, le polynôme $3x^2 + 2x - 1$ est une combinaison linéaire des polynômes $u_1 = x^2$, $u_2 = x$ et $u_3 = 1$.

Espace engendré L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$ de E est un sous-espace vectoriel de E.
Ce sous-espace est **l'espace engendré** par $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

Exemple 4 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est engendré par les deux vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, mais aussi par les trois vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exemple 5 L'ensemble des solutions de l'équation $3x - y = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, engendré par le vecteur $u = (1\,; 3)$.

Indépendance linéaire Soient $e_1, e_2, \ldots, e_k$ k vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit qu'ils sont **linéairement indépendants** si <u>la seule</u> solution de l'équation $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_k e_k = 0$ est $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Cela signifie que la seule combinaison linéaire qui donne le vecteur nul est celle où tous les coefficients λ sont nuls.

Exemple 6 Les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants.

En effet, l'équation $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$ amène à résoudre le système :

$$\begin{cases} \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Le déterminant du système est différent de 0, donc la seule solution est $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Exemple 7 Les vecteurs $u_1 = x^2 + x$, $u_2 = x - 1$, $u_3 = x + 1$ et $u_4 = 1$ de l'espace vectoriel P_2 sont linéairement dépendants, car $u_2 = u_3 - 2u_4$.

5.4. Base et dimension d'un espace vectoriel

Une famille est un ensemble ordonné.

Soit $B = (e_1 ; e_2 ; \ldots; e_n)$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit que B est une **base** de E si et seulement si :

1) tout élément de E est une combinaison linéaire des vecteurs de la famille B ;

2) les vecteurs $e_1 ; e_2 ; \ldots ; e_n$ sont linéairement indépendants.

On peut donner deux autres formulations à la définition d'une base :

On dit que B est une base de E si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire de manière *unique* comme combinaison linéaire des vecteurs de B.

On dit que B est une base de E si les vecteurs de B sont linéairement indépendants et qu'ils engendrent E.

Toutes les bases d'un espace vectoriel donné ont le même nombre d'éléments. On appelle **dimension** d'un espace vectoriel E le nombre d'éléments d'une base de E, on note **dim(E)**.

On appelle **base canonique** de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ la base $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Elle est de dimension 2.

La **base canonique** de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Elle est de dimension 3.

Exercice 5.6

Les vecteurs indiqués forment-ils une base de l'espace mentionné ?

a.	$(1 ; 0), (1 ; 2)$	$\mathbb{R}^2$
b.	$(-1 ; 3), (2 ; -6)$	$\mathbb{R}^2$
c.	$(1 ; 2), (0 ; 3), (4 ; -2)$	$\mathbb{R}^2$
d.	$(1 ; 0 ; 0), (0 ; 1 ; 2)$	$\mathbb{R}^2$
e.	$(1 ; 0 ; 0), (0 ; 1 ; 2)$	$\mathbb{R}^3$
f.	$(1 ; 0 ; 3), (1 ; 0 ; 1), (0 ; 1 ; 0)$	$\mathbb{R}^3$
g.	$(1 ; 2 ; 1), (-3 ; 1 ; 2), (-5 ; 4 ; 5)$	$\mathbb{R}^3$

Exercice 5.7

Montrez que, dans l'espace des fonctions affines, $e_1(x) = 1$ et $e_2(x) = x$ forment une base.
Donnez une autre base dans cet espace.

Exercice 5.8

Montrez que les vecteurs $u_1=(1;-2;1)$, $u_2=(-1;0;1)$ et $u_3=(2;1;0)$ sont linéairement indépendants.
Écrivez ensuite les vecteurs de la base canonique dans la base $(u_1 ; u_2 ; u_3)$.

Exercice 5.9

Montrez que l'ensemble des matrices carrées de la forme $\begin{pmatrix}a & b\\0 & c\end{pmatrix}$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, est un sous-espace vectoriel de $M_{2,2}$.

Donnez la dimension et une base de ce sous-espace vectoriel.

5.5. Ce qu'il faut absolument savoir

La définition d'un espace vectoriel (connaître les huit lois de composition)	❏ ok
La définition d'un sous-espace vectoriel	❏ ok
La définition d'une combinaison linéaire	❏ ok
La notion d'indépendance linéaire (et de dépendance linéaire)	❏ ok
La notion de base	❏ ok

6. Applications linéaires

6.1. Applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels. On appelle **application linéaire** de E vers F toute application h de E vers F telle que :

1) $h(u + v) = h(u) + h(v)$

2) $h(\lambda u) = \lambda h(u)$

quels que soient les éléments u et v de E et le nombre réel λ.

Exemple $E = F = \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h(x) = 5x$.
$h(u + v) = 5(u + v) = 5u + 5v = h(u) + h(v)$
$h(\lambda u) = 5(\lambda u) = \lambda(5u) = \lambda h(u)$

Définitions

Une application linéaire de E vers F est aussi appelée **homomorphisme** de E vers F.
Une application linéaire de E vers E est appelée **endomorphisme** de E.
Une application linéaire bijective de E vers F est appelée **isomorphisme** de E vers F.
Un isomorphisme de E vers E est appelé **automorphisme** de E.

Nous reviendrons plus longuement sur les endomorphismes au chapitre 7.

Exercice 6.1

Les applications h de E vers F ci-dessous sont-elles linéaires ?

a. $h(x) = 2x$
b. $h(x) = x + 2$
c. $h(x) = x^2$
d. $h((x ; y)) = 3x - y$
e. $h((x ; y)) = xy$
f. $h((x ; y)) = (2x - y ; x)$
g. $h((x ; y)) = (0 ; |y|)$
h. $h((x ; y)) = (\sin(x) ; y)$
i. $h((x ; y)) = (x ; y ; x - y)$
j. $h((x ; y ; z)) = (x + 2y ; z - 2y)$
k. $h(ax + b) = 5a + 2b$
l. $h(ax^2 + bx + c) = cx^2 + bx + a$
m. $h(f) = f'$ (dérivée de f)

Opérations sur les applications linéaires

Si f et g sont des applications linéaires, alors les applications $f+g$ et $\lambda \cdot f$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) sont aussi linéaires.

Soit E, F et G des espaces vectoriels, f une application linéaire de E vers F et g une application linéaire de F vers G.
L'application $g \circ f$ est alors linéaire de E vers G. En effet :

$$(g\circ f)(u+v) = g(f(u+v)) = g(f(u)+f(v)) = g(f(u))+g(f(v))$$
$$= (g\circ f)(u)+(g\circ f)(v)$$

$$(g\circ f)(\lambda u) = g(f(\lambda u)) = g(\lambda f(u)) = \lambda g(f(u)) = \lambda(g\circ f)(u)$$

Par contre, la multiplication de deux fonctions linéaires n'est pas forcément linéaire :

$$(f{\cdot}g)(u + v) = f(u + v){\cdot}g(u + v) = (f(u) + f(v)){\cdot}(g(u) + g(v)) =$$
$$f(u){\cdot}g(u) + f(u){\cdot}g(v) + f(v){\cdot}g(u) + f(v){\cdot}g(v) =$$
$$(f{\cdot}g)(u) + (f{\cdot}g)(v) + f(u){\cdot}g(v) + f(v){\cdot}g(u)$$

Donc, en général, $(f{\cdot}g)(u + v) \neq (f{\cdot}g)(u) + (f{\cdot}g)(v)$

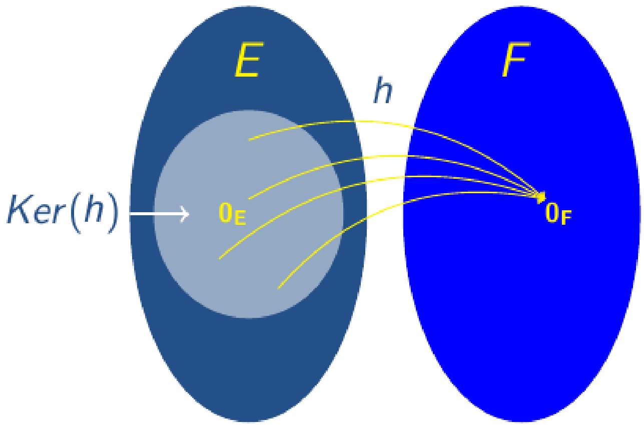
6.2. Noyau et image d'une application linéaire

Noyau

Ker pour *kernel* (noyau en anglais)

Soit h une application linéaire de E vers F. On appelle **noyau** de h, noté **Ker(*h*)**, l'ensemble des vecteurs de E qui ont pour image, par h, le vecteur nul de F.

$$\text{Ker}(h) = \{u \in E \mid h(u) = 0_F\}$$

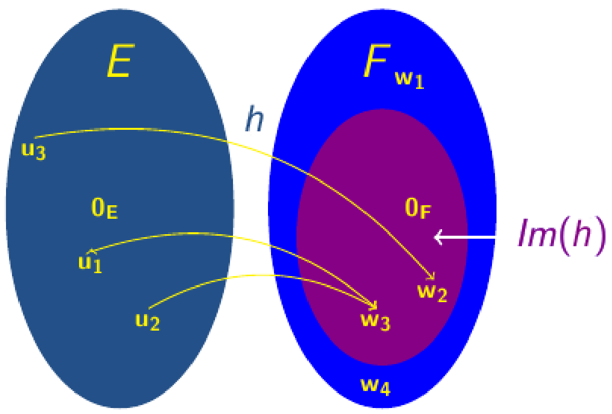


Image

Soit h une application linéaire de E vers F. On appelle **image** de h, noté **Im(*h*)**, l'ensemble des vecteurs de F qui sont image, par h, d'au moins un vecteur de E.

$$\text{Im}(h) = \{v \in F \mid \exists \text{ un } u \in E \text{ tel que } h(u) = v\}$$

On appelle **rang** d'une application linéaire de E vers F la dimension de Im(h).



Remarques

Ker(h) et Im(h) ne sont jamais vides.
Ker(h) est un sous-espace vectoriel de E. Im(h) est un sous-espace vectoriel de F.

Théorème 6.1

Soient E et F deux espaces vectoriels, avec E de dimension finie. Soit h une application linéaire de E vers F. Alors :

$$\dim(\text{Ker}(h)) + \dim(\text{Im}(h)) = \dim(E)$$

Exercice 6.2

Donnez le noyau et l'image des applications linéaires suivantes :

a. $h((x\,;y)) = (2x - y\,;x)$
b. $h((x\,;y)) = (x - y\,;0)$
c. $h((x\,;y)) = (x\,;y\,;x - y)$
d. $h((x\,;y)) = (x - y\,;y - x)$
e. $h((x\,;y)) = (0\,;y\,;x + 2y)$
f. $h((x\,;y\,;z)) = (x + 2y\,;z - 2y)$
g. $h((x\,;y\,;z)) = (z\,;y\,;x)$
h. $h(f) = f'$

Pour chacune de ces questions, vous vérifierez le théorème 6.1.

Exercice 6.3

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x_1 ; x_2 ; x_3) \to (2x_1 + 3x_2 + 2x_3 ; x_2 + x_3 ; 2x_1 - x_3)$.

a. Les vecteurs suivants appartiennent-ils à l'image de f ?
$a = (8 ; 1 ; 7)$, $b = (0 ; 0 ; 0)$, $c = (0 ; 1 ; 0)$, $d = (5 ; 3 ; -4)$

b. À quelles conditions un élément $(y_1 ; y_2 ; y_3)$ de $\mathbb{R}^3$ appartient-il à l'image de f ?

c. Déterminez le noyau de f.

6.3. Matrices et applications linéaires

Il est temps de faire le lien entre les applications linéaires et les matrices. Voici un système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x' = a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ y' = b_1 x + b_2 y + b_3 z \end{cases}$$

Ce système peut aussi être écrit de la façon suivante :

Pour le vérifier, calculez le membre de droite de l'équation !

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{v'} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}}_{M} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{v}$$

Pour obtenir l'image de $v' \in F$ d'un élément $v \in E$ par une application linéaire h, on peut donc simplement effectuer le produit matriciel de la matrice associée à h avec le vecteur v.

$$v' = h(v) = M \cdot v$$

Exercice 6.4

Soit l'application linéaire h de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$, de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Soient les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Calculez $h(u)$, $h(v)$, $h(u + v)$, $h(2u)$, $h(-3v)$, $h(2u - 3v)$.

Exercice 6.5

Déterminez les matrices des applications linéaires de l'exercice 6.2.

Exercice 6.6

On considère $\mathbb{R}^3$ et sa base canonique $E = \{e_1 ; e_2 ; e_3\}$.
Soit l'application linéaire h telle que

$$h(e_1) = 3e_1 - 3e_2 \; ; \quad h(e_2) = 2e_1 - 6e_2 - e_3 \quad \text{et} \quad h(e_3) = 2e_1 + e_2 + e_3$$

a. Écrivez la matrice H de l'application h.

b. Déterminez l'aire de l'image du triangle ABC de sommets $A(0 ; 0 ; 0)$, $B(2 ; 0 ; 0)$ et $C(0 ; 0 ; 2)$ par l'application h.

c. Écrivez la matrice G de l'application $g = h \circ h$.

Exercice 6.7

Soit l'application linéaire $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminez le vecteur v qui est image de u.

b. Déterminez le vecteur w qui a pour image u.

Exercice 6.8

$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Déterminez les matrices des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ suivants :

a. $h(u) = 3u$ **b.** $h(u) = -u$ **c.** $h(u) = xe_1$ **d.** $h(u) = u - 3xe_2$

Exercice 6.9

Déterminez les matrices des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ suivants :

a. $h(u) = 3u$ **b.** $h(u) = (x + 2y + 4z ; -x - 2y - 2z ; z)$ **c.** $h(u) = ye_1 - xe_2$

Exercice 6.10

Soit l'application linéaire h de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ telle que $\begin{cases} h((2;1)) & = & (2;-3) \\ h((1;-1)) & = & (3;-1) \end{cases}$.

Déterminez la matrice de h.

Matrice associée à une application linéaire composée

Nous avons vu que la composition de deux applications linéaires est également une application linéaire. Soit M_1 la matrice associée à l'application linéaire h_1 de E vers F et M_2 la matrice associée à l'application linéaire de F vers G.

Cherchons la matrice M associée à l'application linéaire de $h = h_2 \circ h_1$ de E vers G.

Nous savons que :

$h(u) = M \cdot u$

$h(u) = (h_2 \circ h_1)(u) = h_2(h_1(u)) = M_2 \cdot (M_1 \cdot u)$

Comme le produit matriciel est associatif, on déduit : $h(u) = (M_2 \cdot M_1) \cdot u$

Théorème 6.2

La matrice M associée à l'application linéaire $h_2 \circ h_1$ est égale au produit des matrices M_2 (de h_2) et M_1 (de h_1), **dans cet ordre**.

$$M = M_2 \cdot M_1$$

Exercice 6.11

Soient les applications linéaires h_1 et h_2 respectivement de matrices $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

a. Déterminez les matrices des applications linéaires h_3, h_4 et h_5 suivantes :

$$h_3 = h_1 \circ h_2 \qquad h_4 = h_2 \circ h_1 \qquad h_5 = h_2 \circ h_2$$

La réciproque se trouve en calculant l'inverse de la matrice.

b. Déterminez la matrice de la réciproque de h_3.

Exercice 6.12

Dans $\mathbb{R}^3$ soit l'endomorphisme h suivant :

$$h((x ; y ; z)) = (2y ; 4x-z ; x+y+z).$$

Déterminez la matrice de la réciproque de h.

6.4. Ce qu'il faut absolument savoir

Reconnaître une application linéaire	❏ ok
Donner le noyau et l'image d'une application linéaire	❏ ok
Donner la matrice d'une application linéaire et de sa réciproque	❏ ok

7. Endomorphismes

7.1. Définition

Une application linéaire de E vers E est appelée **endomorphisme** de E.

Deux exemples

1. L'application définie par $f((x\,;y)) = (y\,;x)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. En effet, cette application est linéaire et définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$.

2. On considère l'espace vectoriel P_3 des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 et la base $B = (1\,;x\,;x^2\,;x^3)$. L'application qui associe à chaque fonction polynôme sa fonction dérivée est un endomorphisme de P_3.

   Sa matrice relativement à la base B est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7.1

Les applications suivantes sont-elles des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$?

a. $f : (x\,;y) \to (x\,;xy)$
b. $f : (x\,;y) \to (x^2\,;0)$
c. $f : (x\,;y) \to (x+1\,;y)$
d. $f : (x\,;y) \to (x-y\,;2x+4y)$

7.2. Endomorphisme bijectif (automorphisme)

On considère un endomorphisme f d'un espace vectoriel E. Si f est bijectif, alors sa réciproque ^{r}f est aussi un endomorphisme bijectif de E. On a alors $f \circ {}^{r}f = {}^{r}f \circ f = id_E$.
On considère f et g, deux endomorphismes bijectifs de E. L'endomorphisme $g \circ f$ est bijectif et $^{r}(g \circ f) = {}^{r}f \circ {}^{r}g$.

Théorème 7.1

Si f est un endomorphisme bijectif d'un espace vectoriel E muni d'une base B, alors la matrice A de f, relativement à la base B, est une matrice inversible.
La matrice de ^{r}f est A^{-1}.

Théorème 7.2

On considère un endomorphisme f d'un espace vectoriel E dans lequel on a choisi une base B. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. L'endomorphisme f est bijectif.
2. La matrice de f relative à la base B est inversible.
3. Les images des vecteurs de la base B forment une base de E.
4. L'endomorphisme f est injectif.
5. L'endomorphisme f est surjectif.
6. La dimension du noyau de f est zéro.
7. La dimension de l'image de f est égale à la dimension de E.

Exercice 7.2

On considère une base $B = (e_1\,;e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et un vecteur quelconque $u = xe_1 + ye_2$.
Les applications f suivantes sont-elles des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$?
Déterminez les matrices des endomorphismes relativement à la base B.
Déterminez les endomorphismes bijectifs et les matrices de leur réciproque relativement à la base B.

a. $f : u \to -2u$	**b.** $f : u \to u + e_1$
c. $f : u \to ye_1 - xe_2$	**d.** $f : u \to (-2y-3x)e_1 + (x+y)e_2$
e. $f : u \to 2e_1 - 3e_2$	**f.** $f : u \to (1+y)e_2$

Exercice 7.3 Déterminez l'image et le noyau des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ suivants définis par leur matrice relativement à la base canonique B ($a \in \mathbb{R}$).

a. $M = \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ **b.** $M = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **c.** $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

d. $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **e.** $M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2a & 2 \end{pmatrix}$ **f.** $M = \begin{pmatrix} a & a^2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$

7.3. Changement de base

Matrice de changement de base

Considérons un espace vectoriel E de dimension 2, par exemple $\mathbb{R}^2$. Soient deux bases de E, $B = (e_1\,;\, e_2)$ et $B' = (e'_1\,;\, e'_2)$. Exprimons e'_1 et e'_2 dans la base B :

Rappel

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$e'_1 = a\cdot e_1 + b\cdot e_2 \Rightarrow e'_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\qquad$ $e'_2 = c\cdot e_1 + d\cdot e_2 \Rightarrow e'_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

Soit un vecteur quelconque v. Il peut s'écrire de deux manières :

Première manière, dans la base B

$v = x\cdot e_1 + y\cdot e_2 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Seconde manière, dans la base B'

$v = x'\cdot e'_1 + y'\cdot e'_2 = x'(a\cdot e_1 + b\cdot e_2) + y'(c\cdot e_1 + d\cdot e_2) = (x'\cdot a + y'\cdot c)\cdot e_1 + (x'\cdot b + y'\cdot d)\cdot e_2$

$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} x'\cdot a + y'\cdot c \\ x'\cdot b + y'\cdot d \end{pmatrix}$

Il s'ensuit que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'\cdot a + y'\cdot c \\ x'\cdot b + y'\cdot d \end{pmatrix}$, que l'on peut aussi écrire : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On appelle la matrice $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la **matrice de changement de base** (de B' vers B).

Soient V la matrice colonne comprenant les composantes de v dans la base B ;
V' la matrice colonne comprenant les composantes de v dans la base B'.
Avec ces notations, on a : $P\cdot V' = V$, donc $V' = P^{-1}\cdot V$.
La matrice P est inversible puisque e'_1, e'_2 est une base dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple

Soient $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2' = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

On a immédiatement $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Dans la base B', le vecteur V s'écrit $V' = P^{-1} V = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On peut vérifier que $P V' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = V$.

La même démarche est possible pour un espace vectoriel de dimension n. Connaissant les composantes d'un vecteur v dans une base B, il faut, pour obtenir les composantes de v dans une autre base B' :

1. écrire la matrice P dont les colonnes sont les composantes des vecteurs de la nouvelle base B' relativement à l'ancienne base B
2. calculer la matrice inverse P^{-1}
3. effectuer le produit matriciel $P^{-1}\cdot V$

Matrice d'un endomorphisme dans une nouvelle base

Soit un endomorphisme h de E de matrice M dans une base B. Déterminons la matrice M' de cet endomorphisme dans une nouvelle base B' de E.

Soit un vecteur quelconque u de E et son image v par l'endomorphisme h.

Notons U et V les matrices colonnes des composantes de u et v dans la base B.
U' et V' les matrices colonnes des composantes de u et v dans la base B'.
P la matrice de changement de base $B' \to B$.

Pour obtenir l'image par l'endomorphisme h du vecteur u de E dans la base B', il faut, dans l'ordre :

1. calculer les composantes de u dans la base B' : U'
2. calculer les composantes de u dans la base B : $U = P \cdot U'$
3. calculer les composantes de $h(u) = v$ dans la base B : $V = M \cdot U = M \cdot (P \cdot U')$
4. calculer les composantes de $h(u) = v$ dans la base B' : $V' = P^{-1} \cdot V = P^{-1} \cdot (M \cdot (P \cdot U'))$.

La multiplication matricielle étant associative, on a $V' = (P^{-1} \cdot M \cdot P)U'$.
Cette image s'obtient également directement : $V' = M' \cdot U'$.

En comparant ces deux égalités, on voit que : $M' = P^{-1} \cdot M \cdot P$.

Schéma

$$\begin{tikzcd}
\begin{matrix}\text{Base } B \\ U\end{matrix} \arrow[r, "M", "h"'] & \begin{matrix}\text{Base } B \\ V = M \cdot U\end{matrix} \arrow[d, dashed, "P^{-1}"] \\
\begin{matrix}U' \\ \text{Base } B'\end{matrix} \arrow[u, dashed, "P"] \arrow[r, "M'", "h"'] & \begin{matrix}V' = M' \cdot U' = (P^{-1} \cdot M \cdot P) \cdot U' \\ \text{Base } B'\end{matrix}
\end{tikzcd}$$

Exemple Considérons l'endomorphisme h de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base $B = (e_1 ; e_2)$ et la base $e'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On calcule :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$M' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7.4

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base $B = (e_1 ; e_2)$, on donne l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base B.

Soient les vecteurs $u = (2 ; 1)$, $v = (-1 ; 1)$, $w = (4 ; -3)$.

Soient les nouvelles bases $B_1 = (e_2 ; e_1)$, $B_2 = (e_1 + e_2 ; 3e_2)$, $B_3 = (u ; v)$.

a. Calculez les composantes des vecteurs u, v et w dans chacune de ces bases.

b. Déterminez la matrice de l'endomorphisme h relativement à chacune de ces bases.

Exercice 7.5

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $B_0 = (e_1 ; e_2)$, on considère quatre vecteurs :
$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Après avoir vérifié que $B_1 = (a_1 ; a_2)$ et $B_2 = (b_1 ; b_2)$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$, établissez les matrices de passage...

a. de la base B_1 à la base B_0 **b.** de la base B_0 à la base B_1
c. de la base B_2 à la base B_0 **d.** de la base B_0 à la base B_2
e. de la base B_2 à la base B_1 **f.** de la base B_1 à la base B_2

Exprimez le vecteur (1 ; 1) dans les trois bases et utilisez ces trois vecteurs pour vérifier que vos matrices de passage sont exactes.

Exercice 7.6

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base $B = (e_1 ; e_2 ; e_3)$, on donne l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base B.

Soient les vecteurs $u = (1 ; 1 ; 1)$, $v = (1 ; 1 ; 0)$, $w = (5 ; -2 ; 3)$. Soient les nouvelles bases $B_1 = (e_3 ; e_2 ; e_1)$, $B_2 = (u ; v ; e_1)$.

a. Calculez les composantes des vecteurs u, v et w dans chacune de ces bases.
b. Déterminez la matrice de l'endomorphisme h relativement à chacune de ces bases.

7.4. Valeurs propres et vecteurs propres

Remarquez que $h(0) = 0$ est toujours vrai.

Soit h un endomorphisme d'un espace vectoriel E. $\lambda \in \mathbb{R}$ est une **valeur propre** de h s'il existe (au moins) un vecteur $u \neq 0$ de E tel que :

$$h(u) = \lambda u$$

Un tel vecteur u est appelé **vecteur propre** associé à λ.

On note E_λ l'ensemble de tous les vecteurs de E tels que $h(v) = \lambda v$. Il s'appelle le **sous-espace propre** associé à λ. C'est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple Soit un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On pose la condition $h(u) = \lambda \cdot u \Leftrightarrow M \cdot u = \lambda \cdot u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-\lambda)x + 2y = 0 \\ x + (2-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

Ce système d'équations admet la solution (0 ; 0) et il ne peut avoir d'autres solutions non nulles que si $D = \mathrm{Det}(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

L'ensemble de valeurs propres d'une matrice carrée A est appelé **spectre** de A.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4.$$

Nous pouvons maintenant trouver les sous-espaces propres correspondant à ces deux valeurs propres.

Pour $\lambda_1 = 1$:

vecteurs propres associés $u_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$.

Sous-espace vectoriel propre : E_1 = droite d'équation $y = -x$.

Pour $\lambda_2 = 4$:

vecteurs propres associés $u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$.

Sous-espace vectoriel propre : E_2 = droite d'équation $y = \frac{x}{2}$.

Théorème 7.3 Un nombre réel λ est une valeur propre de h de matrice $M \Leftrightarrow \text{Det}(M - \lambda I) = 0$

Démonstration Soit λ une valeur propre, alors il existe un vecteur $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ non nul tel que :

Pour simplifier, la démonstration est faite dans un espace à deux dimensions, le passage à n dimensions ne pose pas de problème particulier.

$M \cdot u - \lambda u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(M - \lambda I)u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Or, le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ satisfait également la même relation :

$$M\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (M - \lambda I)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La fonction représentée par la matrice $M - \lambda I$ n'est donc pas bijective et donc pas inversible $\Rightarrow$ $\text{Dét}(M - \lambda I) = 0$.

Calcul des valeurs propres et des vecteurs propres C'est en posant $\text{Dét}(M - \lambda I) = 0$ que l'on trouve les valeurs propres.

Pour trouver les vecteurs propres associés à ces valeurs propres, il faut résoudre le système $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Exercice 7.7 Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ est défini par sa matrice A relativement à la base canonique.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Le nombre 2 est-il une valeur propre de f ?

b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$. Le nombre -3 est-il une valeur propre de f ?

c. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est-il un vecteur propre de f ?

d. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est-il un vecteur propre de f ?

Exercice 7.8 Déterminez les valeurs et les vecteurs propres des endomorphismes h de $\mathbb{R}^2$ définis par

a. $h((x\,;y)) = (3y\,;x + 2y)$

b. $h((x\,;y)) = \left(-\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}y; \frac{1}{4}x + y\right)$

Exercice 7.9 Montrez que l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ défini par $h((x\,;y)) = (-y\,;x)$ n'admet aucun vecteur propre.

7.5. Diagonalisation

Matrice d'un endomorphisme dans une base de vecteurs propres

Soit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Nous avions trouvé dans l'exemple précédent :

Valeur propre : $\lambda_1 = 1$, un vecteur propre : $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Valeur propre : $\lambda_2 = 4$, un vecteur propre : $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nous voulons exprimer la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base $(u_1 ; u_2)$. La matrice de changement de base est : $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, et son inverse : $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La nouvelle matrice s'exprime donc :

M' est une matrice diagonale. Sur la diagonale se trouvent les valeurs propres.

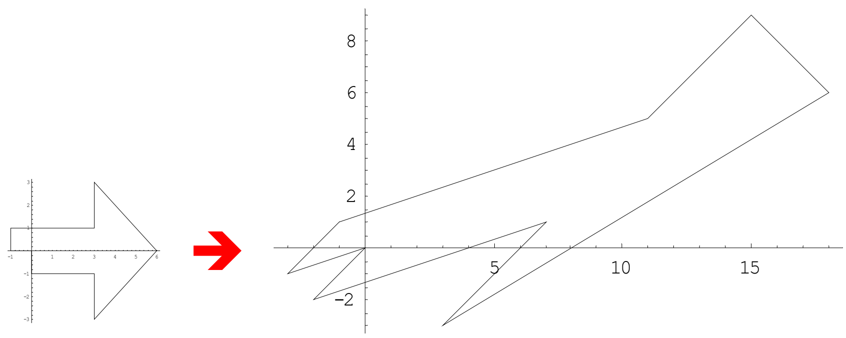
$$M' = P^{-1}MP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ainsi, par h, le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ a pour image $\begin{pmatrix} x \\ 4y \end{pmatrix}$.

Géométriquement

Par l'endomorphisme h, on obtient la transformation suivante (on a simplement multiplié tous les points de la flèche par la matrice M) :

$v' = M \cdot v$



Voici ce qui se passe si on travaille dans la base des vecteurs propres. Chaque point de la flèche a été transformé ainsi :

$M = \underbrace{P}_{3.} \cdot \underbrace{M'}_{2.} \cdot \underbrace{P^{-1}}_{1.}$

1. On exprime les coordonnées du point dans la nouvelle base des vecteurs propres. Par exemple, le point (3; 1) s'écrit $\left(\frac{1}{3} ; \frac{4}{3}\right)$ dans la base (u_1, u_2).
2. On multiplie la coordonnée x par λ_1 et la coordonnée y par λ_2. $\left(\frac{1}{3} ; \frac{4}{3}\right)$ devient $\left(\frac{1}{3} ; \frac{16}{3}\right)$.
3. On revient dans la base canonique. Les nouvelles coordonnées sont (11; 5).

Définition

Un endomorphisme h de E est **diagonalisable** s'il existe une base de E relativement à laquelle sa matrice est diagonale.

Théorème 7.4

Un endomorphisme h de E est **diagonalisable** si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres.

Soit un endomorphisme h de E de dimension n ayant n valeurs propres : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$. Dans la base de vecteurs propres, la matrice M est une matrice diagonale ($m_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$) dont les éléments de la diagonale sont les valeurs propres de h.

Les valeurs propres λ_i ne sont pas nécessairement distinctes.

Intérêt de la diagonalisation

Considérons l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ donné par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, relativement à la base canonique.

Pour calculer la matrice A^{10} de $h^{10} = h \circ h \circ ... \circ h$ (10 termes), il est avantageux de diagonaliser la matrice de h, car le calcul direct de la matrice A^{10} est très long.

Pour rappel, élever une matrice diagonale à la puissance n consiste simplement à élever les termes de la diagonale à la puissance n.

Or, $A^{10} = (P{\cdot}D{\cdot}P^{-1}){\cdot}(P{\cdot}D{\cdot}P^{-1}){\cdot}\ ...\ {\cdot}(P{\cdot}D{\cdot}P^{-1}) = P{\cdot}D^{10}{\cdot}P^{-1}$, car $P^{-1}{\cdot}P = I$.
D est la matrice diagonale de h et P la matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs propres.

Pour diagonaliser A, on cherche les valeurs propres et les vecteurs propres associés.
L'équation caractéristique de l'endomorphisme h est $\lambda^3 - 2\lambda^2 = 0$. Elle admet trois solutions, dont deux distinctes, $\lambda_{1,2} = 0$ et $\lambda_3 = 2$.
Comme 0 est une solution double, il existe deux vecteurs propres linéairement indépendants associés à la valeur propre 0 : $u_1 = (1 ; 1 ; 0)$ et $u_2 = (0 ; 2 ; 1)$.
On note $u_3 = (1 ; 1 ; 1)$ un vecteur propre associé à $\lambda_3 = 2$.

Attention de placer les valeurs propres et les vecteurs propres dans le même ordre dans les matrices D et P.

Relativement à la base $(u_1 ; u_2 ; u_3)$ de $\mathbb{R}^3$, la matrice de h est une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On écrit la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on détermine son inverse $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, puis on obtient la matrice de h^{10} relativement à la base canonique :

$$A^{10} = P{\cdot}D^{10}{\cdot}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^9 & -2^9 & 2^{10} \\ 2^9 & -2^9 & 2^{10} \\ 2^9 & -2^9 & 2^{10} \end{pmatrix}$$

Exercice 7.10

Un endomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ est défini par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique.

a. Vérifiez que $u_1 = (1 ; -1)$ et $u_2 = (3 ; -1)$ sont deux vecteurs propres de h. Quelles sont les valeurs propres associées ?
b. Écrivez la matrice de passage P de la base des vecteurs propres à la base canonique. Calculez P^{-1}.
c. On note D la matrice de h relativement à la base des vecteurs propres. Écrivez D et vérifiez que $A = P{\cdot}D{\cdot}P^{-1}$.
d. Vérifiez l'égalité $A^2 = P{\cdot}D^2{\cdot}P^{-1}$.
e. Calculez A^5.

7.6. Ce qu'il faut absolument savoir

Savoir ce qu'est un endomorphisme ❑ ok
Savoir ce qu'est un endomorphisme bijectif ❑ ok
Connaître la technique de changement de base ❑ ok
Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice ❑ ok
Diagonaliser une matrice ❑ ok
Élever une matrice à une grande puissance ❑ ok

8. Applications en sciences

8.1. Évolution de populations

Dans beaucoup de domaines comme l'écologie, l'économie et les sciences appliquées, on établit des modèles mathématiques de phénomènes dynamiques qui évoluent dans le temps. Les mesures d'un certain nombre de caractéristiques du système sont prises à des intervalles de temps réguliers, fournissant ainsi une suite de vecteurs x_0, x_1, x_2,.... Les composantes de x_k rendent compte de l'état du système au moment de la k-ème mesure.
S'il existe une matrice A telle que $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1$ et, en général.

$$x_{k+1} = Ax_k \text{ pour } k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (*)$$

alors (*) est appelé une équation de récurrence linéaire (ou équation aux différences finies).

Exercice 8.1

Les démographes s'intéressent aux déplacements de populations ou de groupes de personnes d'un endroit vers une autre. Nous exposons ici un modèle simple qui rend compte des va-et-vient d'une population entre une certaine ville et ses faubourgs immédiats durant un certain nombre d'années.
On choisit une année initiale, disons 2000, et on désigne les populations de la ville et des faubourgs de cette année-là par v_0 et f_0 respectivement. Soit x_0 le vecteur population $x_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ f_0 \end{pmatrix}$ en 2000, $x_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ f_1 \end{pmatrix}$ la population en 2001, etc.
Des études démographiques ont montré que chaque année environ 5 % des habitants des villes émigrent vers les faubourgs (95 % restent en ville) tandis que 3 % quittent les faubourgs (et 97 % restent dans les faubourgs) pour s'installer en ville.

Calculez la population en 2001 et en 2002 de la région dont il vient d'être question, sachant qu'en 2000 elle se montait à 600'000 citadins et 400'000 habitants des faubourgs.

8.2. Le système proie-prédateur

Exemple

Au fond des forêts de séquoias californiennes, les rats des bois aux pattes foncées fournissent jusqu'à 80 % de la nourriture des chouettes, le principal prédateur de ce rongeur. Cet exercice propose un système dynamique linéaire pour modéliser le système des chouettes et des rats. Le modèle n'est pas réaliste à divers égards, mais il a le mérite de constituer un premier modèle abordable.

On désigne les populations de chouettes et de rats au moment k par $x_k = \begin{pmatrix} C_k \\ R_k \end{pmatrix}$, où k est le temps en mois, C_k le nombre de chouettes dans la région étudiée et R_k le nombre de rats (en milliers). On suppose que

$$\begin{cases} C_{k+1} = 0.5\,C_k + 0.4\,R_k \\ R_{k+1} = -p \cdot C_k + 1.1\,R_k \end{cases} \qquad (*)$$

où p est un paramètre positif à spécifier.

Le terme $0.5C_k$ dans la première équation traduit le fait qu'en l'absence de rats pour se nourrir, seule la moitié des chouettes survivraient chaque mois.

Le terme $1.1R_k$ dans la deuxième équation signifie qu'en l'absence des chouettes comme prédateurs, le nombre de rats augmenterait de 10 % par mois.

Si les rats sont abondants, le $0.4R_k$ tend à faire croître la population des chouettes tandis que le terme négatif $-p \cdot C_k$ rend compte du nombre de rats disparus, mangés par les chouettes. (En effet, 1000 p est le nombre moyen de rats qu'une chouette mange chaque mois.)

Question Déterminez l'évolution de ce système quand le paramètre p est fixé à 0.104.

Théorie C'est dans les valeurs propres et les vecteurs propres que se trouve la clef pour comprendre le comportement à long terme ou *évolution* d'un système dynamique décrit par une équation de récurrence $x_{k+1} = A\,x_k$.

Nous supposons que A est diagonalisable et possède n vecteurs propres linéairement indépendants $v_1,\dots, v_n$ associés aux valeurs propres $\lambda_1, .., \lambda_n$. Il est commode de supposer que les vecteurs propres sont ordonnés de façon que $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|$.

Comme $\{v_1, ..., v_n\}$ forme une base de $\mathbb{R}^n$, tout vecteur initial x_0 peut être écrit, de façon unique toutefois, sous la forme

$$x_0 = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n$$

Cette *décomposition en vecteurs propres* de x_0 détermine entièrement le comportement de la suite $\{x_k\}$. Puisque les v_i sont des vecteurs propres,

$$x_1 = A\,x_0 = c_1 A v_1 + \ldots + c_n A v_n = c_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + c_n \lambda_n v_n$$

En général,

$$x_k = c_1 (\lambda_1)^k v_1 + \ldots + c_n (\lambda_n)^k v_n \qquad (k = 0, 1, 2, ...)$$

Solution Pour p = 0.104, les valeurs propres de la matrice A des coefficients de (*) sont $\lambda_1 = 1.02$ et $\lambda_2 = 0.58$. Des vecteurs propres associés sont $v_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Un vecteur initial x_0 peut être écrit sous la forme $x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2$.

Alors, pour $k \geq 0$, $x_k = c_1 (1.02)^k v_1 + c_2 (0.58)^k v_2 = c_1 (1.02)^k \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix} + c_2 (0.58)^k \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lorsque $k \to \infty$, $(0.58)^k$ s'approche rapidement de 0. On suppose $c_1 > 0$. Donc, pour toute valeur suffisamment grande de k,

$$x_k \approx c_1 (1.02)^k \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$x_{k+1} \approx c_1 (1.02)^{k+1} \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix} = (1.02) c_1 (1.02)^k \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix} \approx 1.02\, x_k$$

Les approximations ci-dessus établissent qu'en fin de compte les deux composantes de x_k (le nombre de chouettes et le nombre de rats) augmentent d'un facteur presque égal à 1.02 par mois, ce qui revient à un taux d'accroissement de 2 %. Or, x_k est à peu de choses près un multiple de (10, 13).

Les composantes de x_k sont donc dans un rapport proche du rapport de 10 à 13, autrement dit il y a environ 13 milliers de rats pour 10 chouettes.

Exercice 8.2 Déterminez l'évolution du système dynamique de l'exemple quand le paramètre de prédation p vaut :

- **a.** 0.2
- **b.** 0.125

Donnez une expression de x_k.

Comment évoluent dans le temps les populations de chouettes et de rats ?

8.3. Modèle de Leslie

Patrick Holt **Leslie**
(1900 - 1972)

En démographie, on étudie l'évolution d'une population à partir des taux de fécondité et de mortalité. Pour présenter un modèle simple, on exclut d'autres caractéristiques telles que la migration et on suppose que la population dispose de ressources illimitées. Comme seules les femelles donnent la vie, il suffit de considérer les classes d'âge des femelles de la population.
Considérons une population de rongeurs dont le cycle de reproduction est de 3 ans. Chaque femelle donne en moyenne naissance à 6 femelles durant sa deuxième année et à 10 femelles durant sa troisième année. Cependant, seule une femelle sur deux survit au-delà de sa première année et seules 40 % de celles qui survivent la deuxième année survivront jusqu'à la troisième année.
Si l'on écrit sous forme vectorielle (x_1 ; x_2 ; x_3) les effectifs x_i des femelles à l'âge i, l'année suivante, la répartition de cette population est donnée par le vecteur y ci-dessous, qui peut s'écrire sous forme matricielle $y = Lx$:

$$\begin{pmatrix} 6x_2 + 10x_3 \\ 0.5x_1 \\ 0.4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $y = Lx$ fournit les effectifs des femelles de chaque classe d'âge après une année. Pour (10 ; 0 ; 0) par exemple, on trouve successivement :

an	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
x_1	10	0	30	20	90	120	310	540	1170	...
x_2	0	5	0	15	10	45	60	155	270	...
x_3	0	0	2	0	6	4	18	24	62	...

La matrice L possède deux valeurs propres 2 et −1. On vérifie immédiatement que (20 ; 5 ; 1) est un vecteur propre associé à la valeur propre 2. Si une population est répartie en classes d'âge dans les rapports 20 : 5 : 1, alors ses effectifs sont doublés chaque année. Le vecteur propre (10 ; –5 ; 2) associé à la valeur propre −1 n'a pas de signification en termes d'effectifs.
Plus généralement, on appelle matrice de Leslie, une matrice carrée de la forme

$$L = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} & f_n \\ p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & p_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

qui modélise la dynamique d'une population structurée en n classes d'âge. La première ligne contient les coefficients (positifs) de fertilité f_i de la classe d'âge i et les éléments p_i sous la diagonale indiquent les probabilités (ou taux) de survie de la classe d'âge i à la suivante.

Exercice 8.3

Une population de scarabées présente quatre classes d'âge d'une année chacune avec des taux de survie de respectivement 10 %, 50 % et 50 % et une reproduction uniquement durant la quatrième année de p descendants par individu. Écrire la matrice de Leslie qui modélise la dynamique de cette population.
Quelle est la valeur minimale de p qui assure la survie de l'espèce ?

Exercice 8.4

Un modèle de Leslie est proposé pour représenter la dynamique de la population d'un pays. Ne prenant en compte que les individus de sexe féminin, on a choisi dix classes d'âge d'une durée de 5 ans chacune. Les éléments de la première ligne de la matrice de Leslie sont

0.000 0.000 0.001 0.012 0.376 0.438 0.383 0.046 0.007 0.002

et les éléments situés sous la diagonale sont

0.996 0.998 0.997 0.996 0.996 0.994 0.992 0.990 0.983

a. Comment expliquer que les éléments de la première ligne sont croissants puis décroissants ? Un tel élément peut-il être supérieur à 1 ?

b. Pourquoi le premier coefficient de la deuxième liste est-il inférieur au suivant ?

c. Pourquoi le modèle ne tient-il pas compte des individus de plus de 50 ans ?

Exercice 8.5

On considère un modèle de Leslie de matrice $L = \begin{pmatrix} 0.25 & 1 \\ 0.75 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Donnez une interprétation des éléments non nuls de la matrice L par rapport à la population que l'on modélise.

b. Trouvez les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice L. Donnez une interprétation des résultats.

c. Diagonalisez la matrice L et calculer L^n. En déduire le comportement asymptotique de la dynamique de cette population.

Exercice 8.6

Même exercice que le précédent avec la matrice $L = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 0.25 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 8.7

On considère une population de saumons. En moyenne, deux neuvièmes meurent la première année. Durant la deuxième année, ils donnent naissance en moyenne à un juvénile par individu, puis les six septièmes meurent. Chaque poisson qui survit la troisième année donne encore naissance en moyenne à deux juvéniles avant de mourir.

a. Écrivez la matrice de Leslie L modélisant l'évolution de cette population.

b. Avec une population initiale de respectivement 1200, 1400 et 500 saumons dans chaque classe d'âge, calculez les populations au début des quatre années suivantes.

c. Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de L.

d. En écrivant le vecteur de la population initiale en combinaison linéaire de trois vecteurs propres, prédisez l'évolution à long terme de la population.

8.4. Économie (modèle fermé de Leontief)

Wassili **Leontief**
(1906 - 1999)

Il existe aussi un modèle ouvert.

Vers la fin des années quarante, Wassily **Leontief**, chercheur de l'université de Harvard, subdivisa l'économie américaine en 500 secteurs, comme ceux de l'industrie de l'automobile, du charbon, des services, etc. Il établit pour chacun une équation linéaire qui décrit comment sa production est redistribuée vers les autres secteurs et énonça un certain nombre de résultats fondamentaux sur les systèmes d'équations de même type. Il ouvrit une nouvelle ère dans la modélisation mathématique de l'économie et reçut le prix Nobel d'économie pour ses travaux en 1973.

Le modèle *fermé* de Leontief des années quarante comportait 500 inconnues pour 500 équations. Nous considérerons ici un modèle beaucoup plus simple.
Un modèle économique se divise en trois secteurs : Charbon (C), Électricité (E) et Acier (A). Le tableau montre la production et les achats de chaque secteur en proportion. Montrons qu'il existe des revenus qui équilibrent les coûts de chacun.

		Produit par		
		C	E	A
Acheté par	C	0.0	0.4	0.6
	E	0.7	0.2	0.2
	A	0.3	0.4	0.2

Dans cet exemple, la troisième colonne indique que 60 % de la production du secteur Acier va au secteur Charbon, 20 % à celui de l'Électricité, 20 % à celui de l'Acier. Toutes les productions étant prises en compte, la somme d'une colonne est égale à 1.
La troisième ligne indique que le secteur Acier a acheté 30 % de la production du secteur Charbon, 40 % de celui de l'Électricité, 20 % de celui de l'Acier.

Notons par r_C, r_E et r_A les revenus respectifs des secteurs Charbon, Électricité et Acier. Leurs dépenses sont alors respectivement égales à :

$0.4r_E + 0.6r_A$ pour le charbon (première ligne)
$0.7r_C + 0.2r_E + 0.2r_A$ pour l'électricité (deuxième ligne)
$0.3r_C + 0.4r_E + 0.2r_A$ pour l'acier (troisième ligne).

L'**équilibre économique** entre secteurs a lieu lorsque les dépenses sont égales aux revenus :

$$\begin{cases} & & 0.4\,r_E & + & 0.6\,r_A & = & rc \\ 0.7\,r_C & + & 0.2\,r_E & + & 0.2\,r_A & = & r_E \\ 0.3\,r_C & + & 0.4\,r_E & + & 0.2\,r_A & = & r_A \end{cases}$$

On peut évidemment aussi écrire ce système sous forme matricielle : en posant $M = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.7 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$ et $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_C \\ r_E \\ r_A \end{pmatrix}$, on a alors $M \cdot \vec{r} = \vec{r}$ ou $(M - I) \cdot \vec{r} = \vec{0}$.
Résoudre ce système revient donc à trouver un vecteur propre de M correspondant à la valeur propre $\lambda=1$.

On trouve $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_C \\ r_E \\ r_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1 \\ 0.83 \end{pmatrix}$.

Cela signifie que si le secteur Électricité produit l'équivalent d'un milliard de francs, alors le secteur Charbon doit produire l'équivalent de 900 millions de francs et le secteur Acier l'équivalent de 830 millions de francs pour obtenir l'équilibre entre les dépenses et les revenus.

Exercice 8.8

Une économie fermée comprend deux secteurs, les biens et les services. Le secteur des biens vend 75 % des biens au secteur des services et garde le reste. Le secteur des services fournit 60 % de ses prestations au secteur des biens et garde le complément pour lui.
Déterminez les prix d'équilibre afin que les recettes compensent les dépenses.

Exercice 8.9

Un grand domaine d'une économie fermée est divisée en trois secteurs : la chimie, l'énergie, l'industrie. La chimie vend 25 % de sa production à l'énergie, 55 % à l'industrie et garde le reste. L'énergie vend 75 % de sa production à la chimie, 10 % à l'industrie et garde le reste. L'industrie vend 40 % à la chimie, 40 % à l'énergie et garde le reste.
Écrivez la matrice des échanges et déterminer les prix d'équilibre qui permettent aux dépenses d'être compensées par les recettes.

8.5. Matrices de transition

Une matrice de transition T est une matrice carrée dont les éléments sont tous positifs ou nuls, de plus la somme des éléments de chaque colonne est égale à 1. L'élément t_{ij} d'une telle matrice peut être considéré comme la probabilité de passer de l'état j à l'état i. Une matrice-colonne E dont les éléments sont positifs et dont la somme des éléments est 1 est appelée vecteur d'état.
Un vecteur d'état E qui vérifie l'égalité $T{\cdot}E = E$ est appelé vecteur d'état stationnaire.
Dans ce cas, le vecteur d'état E est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.
Les matrices de transition servent de modèle mathématique dans de nombreux domaines (biologie, chimie, économie,...).

Propriétés

1. Si T est une matrice de transition et n est un entier naturel, alors T^n est une matrice de transition.
2. Toute matrice de transition admet la valeur propre 1.
3. Toute matrice de transition admet un vecteur d'état stationnaire.

Exercice 8.10

On considère la matrice de transition $T = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix}$. Déterminez un vecteur d'état stationnaire.

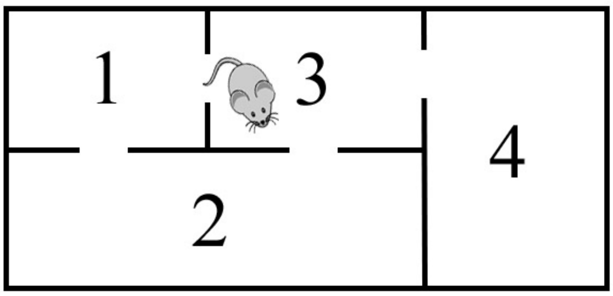
Exercice 8.11

Dans une crèche, un enfant est déclaré en bonne santé ou malade. Parmi les enfants en bonne santé un jour donné, 90 % le seront encore le lendemain. Parmi les enfants malades, 30 % le seront encore le lendemain. Le 2 mars, 15 % des enfants sont malades.

a. Trouvez la matrice de transition.
b. Quel est le vecteur d'état au 2 mars, au 3 mars, au 4 mars ?
c. Quelle est la proportion d'enfants malades à long terme ?

Exercice 8.12

Une souris est placée dans un labyrinthe. Chaque fois qu'elle entend un coup de sifflet, elle panique et change de compartiment, en choisissant au hasard une des portes.



a. Déterminez la matrice de transition associée à cette situation.
b. La souris se trouvait dans le compartiment 3 au départ. Écrivez le vecteur correspondant à sa position après un coup de sifflet.
c. Et après un deuxième coup de sifflet ?
d. Quel est le vecteur d'état stationnaire ? Interprétez ce résultat.

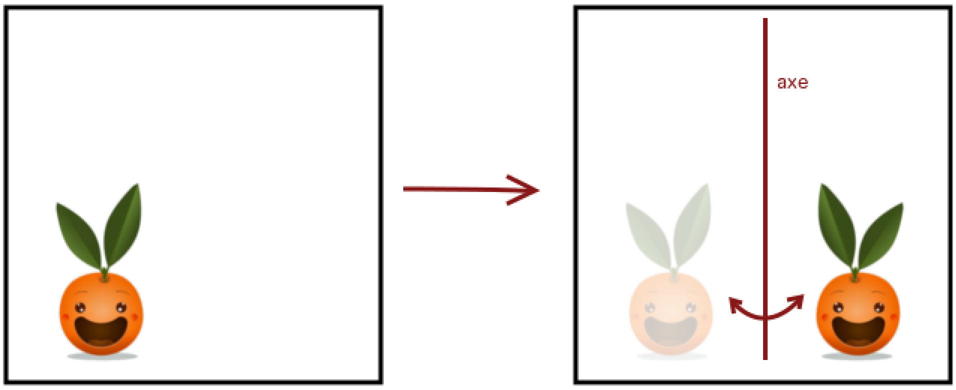
8.6. Ce qu'il faut absolument savoir

Le modèle de Leslie ❑ ok
Le modèle fermé de Leontief ❑ ok
Les matrices de transitions (élévation à la puissance, état stationnaire) ❑ ok

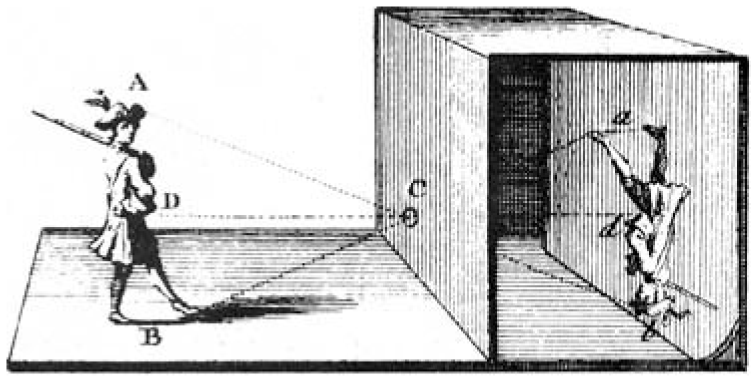
9. Applications en géométrie

9.1. Rappel visuel sur les transformations géométriques usuelles

Symétrie axiale orthogonale

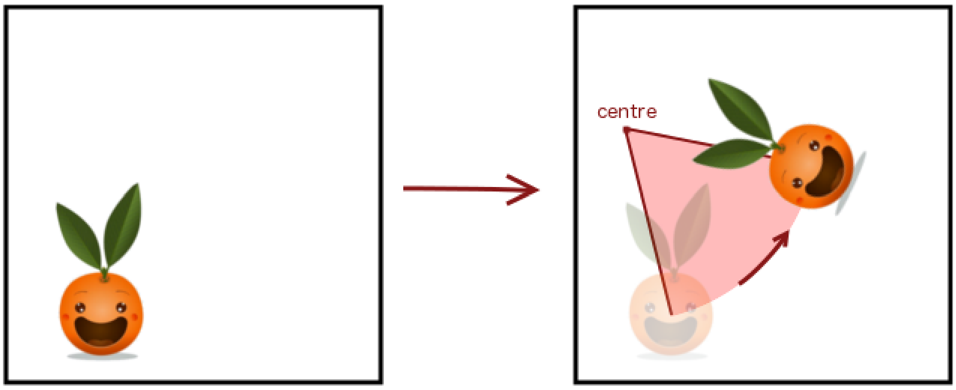


Symétrie centrale

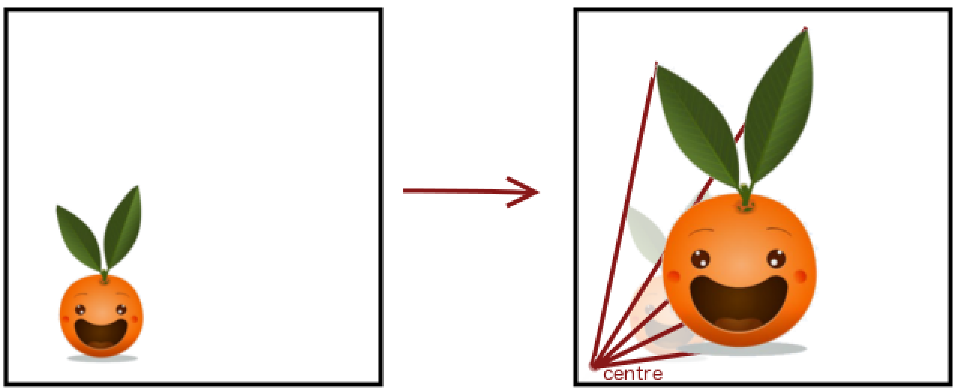


La chambre obscure – d'après la grande Encyclopédie de Diderot et d'Alembert

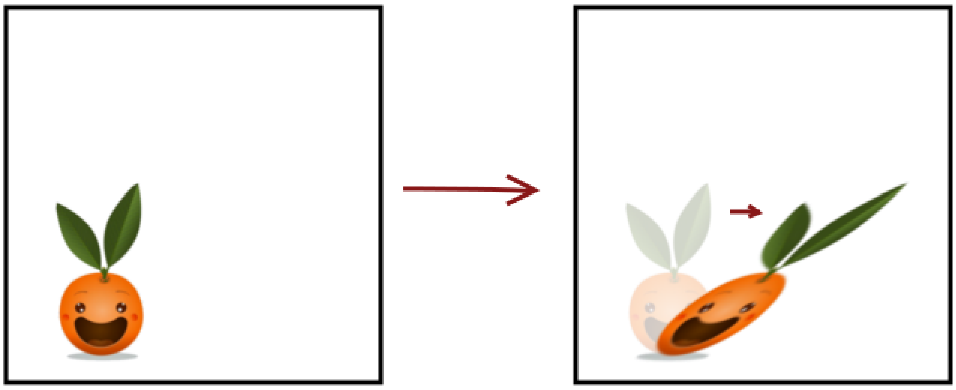
Rotation



Homothétie



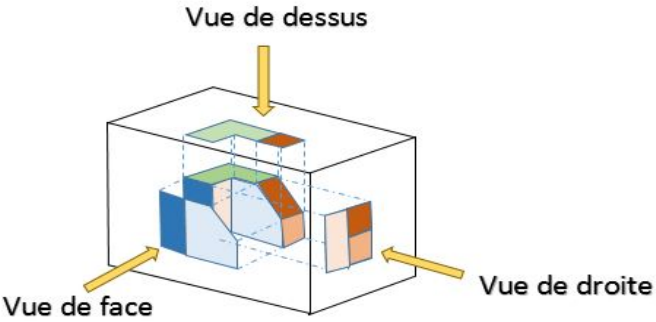
Cisaillement



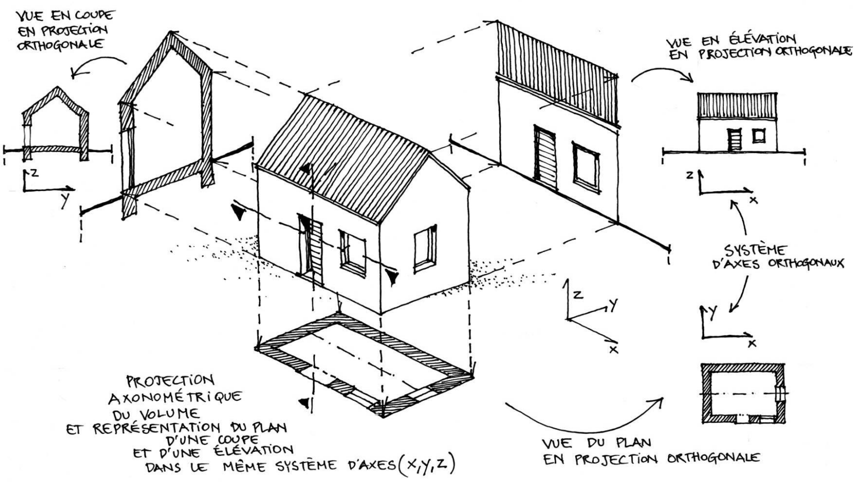
Projections orthogonales

Gaspard **Monge**

(1746 - 1818)



Les projections orthogonales sont la base de ce que l'on appelle la *géométrie descriptive*. Inventée par le mathématicien français Gaspard **Monge**, elle consiste à représenter un ou plusieurs objets de l'espace à trois dimensions en un minimum de projections orthogonales pour en lever l'ambiguïté. Le choix des plans de projection est fonction du problème posé et deux plans de projection sont la plupart du temps suffisants.



Autrefois beaucoup utilisée en architecture et en chaudronnerie, elle est tombée en désuétude avec l'apparition des logiciels de CAO (conception assistée par ordinateur).

Exercice 9.1

Méthode

Voyez comment sont transformés les vecteurs $i=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $j=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Déterminez la nature géométrique des applications linéaires suivantes :

$$M_1=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix},\quad M_2=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix},\quad M_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad M_4=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}$$

Exercice 9.2

Donnez, pour chaque application linéaire du plan (P) dans le plan (P), la matrice de h.

Méthode :
Voyez comment sont transformés les vecteurs $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

a. Symétrie d'axe Ox.
b. Symétrie d'axe Oy.
c. Symétrie d'axe $y = x$.
d. Symétrie d'axe $y = -x$.
e. Projection orthogonale sur Ox.
f. Projection orthogonale sur Oy.
g. Homothétie de centre O et de rapport 2.
h. Rotation de centre O et d'angle –90°.
i. Rotation de centre O et d'angle +180°.
j. Rotation de centre O et d'angle +30°.
k. Rotation de centre O et d'angle α.
l. Cisaillement : $(x\,;y) \mapsto (x + ky\,;y)$.

Exercice 9.3

Soit l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ de matrice $M=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

a. Déterminez l'image, par h, de la droite $d : x - y + 4 = 0$.
b. Déterminez l'image, par h, de la droite $g : x - 2y = 0$.
c. Déterminez les points fixes de h.
d. Déterminez la nature géométrique de h.

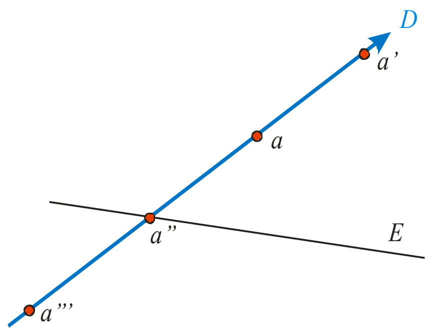
Un point u est **fixe** si $u = h(u)$.

9.2. Affinité

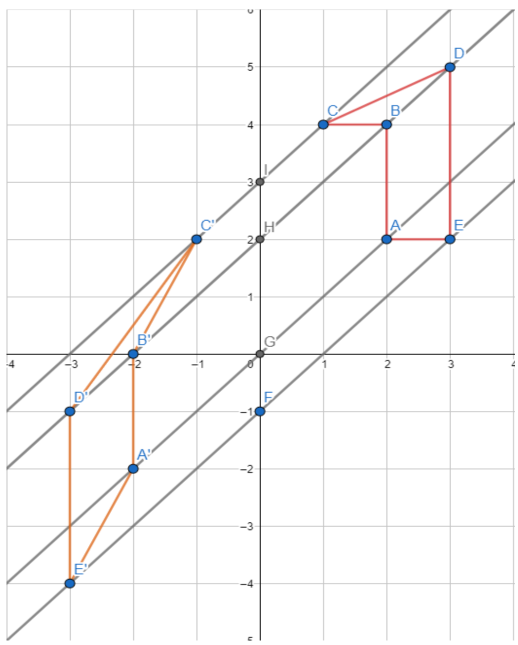
Définition

E est l'axe d'affinité.
D est la direction de l'affinité.

a est le point avant d'appliquer l'affinité.
a' est une affinité de rapport $\lambda = 2$ par rapport à l'axe E et de direction D.
a'' est une affinité de rapport $\lambda = 0$ par rapport à l'axe E et de direction D.
a''' est une affinité de rapport $\lambda = -1$ par rapport à l'axe E et de direction D.



Les affinités recouvrent :
- l'identité ($\lambda = 1$),
- les projections ($\lambda = 0$),
- les symétries ($\lambda = -1$),
- les homothéties.



Les points F, G, H et I sont sur l'axe d'affinité.
On a :
$\overline{GA}=\overline{GA'}$
$\overline{HB}=\overline{HB'}$
$\overline{IC}=\overline{IC'}$
$\overline{HD}=\overline{HD'}$
$\overline{FE}=\overline{FE'}$

Affinité d'axe Oy et de rapport -1, selon la direction $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

9.3. Nature géométrique des endomorphismes

Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. On trouve les valeurs propres et les vecteurs propres associés suivants :

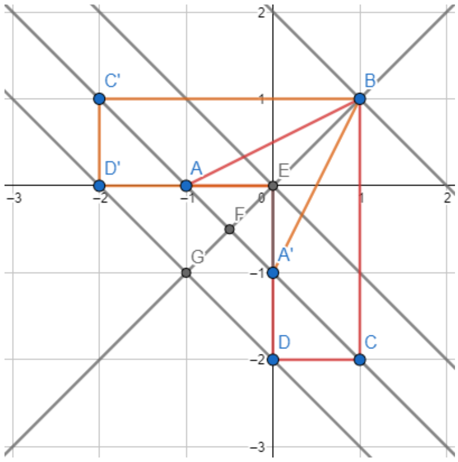
Pour $\lambda_1 = 3$: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour $\lambda_2 = -1$: $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$y = -x$: droite de vecteur directeur u_1

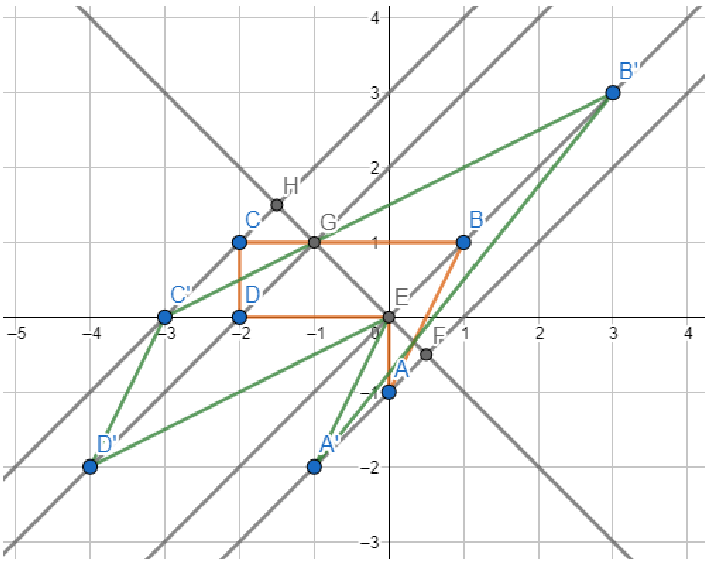
$y = x$: droite de vecteur directeur u_2

Géométriquement parlant, h est une affinité de rapport -1 dans la direction $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ par rapport à l'axe $y = x$, combinée à une affinité de rapport 3 dans la direction $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ par rapport à l'axe $y = -x$.

Prenons comme figure de départ un polygone fermé reliant les points A(–1 ; 0), B(1 ; 1), C(1 ; –2), D(0 ; –2) et E(0 ; 0).



La première affinité est tout simplement une symétrie axiale orthogonale



La seconde affinité

Ce sont bien les points que l'on trouve par calcul, en multipliant les points de départ par la matrice M.

Les points finaux ont pour coordonnées A'(–1 ; –2), B'(3 ; 3), C'(-3 ; 0), D'(–4 ; –2) et E(0 ; 0).

Exercice 9.4

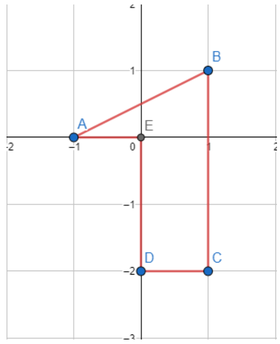
Soient les huit endomorphismes suivants de $\mathbb{R}^2$ par leur matrice relativement à une base *B*.

1. $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$

GeoGebra

a. Avec ces endomorphismes, déformez l'image ci-contre, obtenue en reliant, dans l'ordre, les points de coordonnées : A(–1 ; 0), B(1 ; 1), C(1 ; –2), D(0 ; –2), E(0 ; 0).



b. Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres associés pour chacun des endomorphismes.

c. Retrouvez par construction géométrique (affinités) les images de ces points, à l'aide des valeurs propres et des vecteurs propres (quand ils existent).

d. Déterminez la nature géométrique de ces endomorphismes.

9.4. Endomorphisme orthogonal

Définition

On a donc ${}^tM\,M = M\,{}^tM = I$

Une matrice carrée *M* est **orthogonale** si $M^{-1} = {}^tM$.
L'endomorphisme de *E* est un endomorphisme orthogonal si sa matrice relativement à une base orthonormée est orthogonale.

Théorème 9.1

Le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à +1 ou –1.

Propriétés

1. Un endomorphisme orthogonal *h* de *E* conserve la norme des vecteurs : pour tout vecteur $x \in E$, on a $\|h(x)\| = \|x\|$. Un endomorphisme orthogonal est, de ce fait, également appelé isométrie. Géométriquement, on peut montrer que si une transformation de *E* vers *E* conserve les longueurs, elle conserve aussi les angles.
2. Un endomorphisme orthogonal conserve l'orthogonalité des vecteurs. La réciproque est fausse : l'homothétie en est un contre-exemple.
3. Un endomorphisme est orthogonal si et seulement s'il transforme une base orthonormée de *E* en une autre base orthonormée de *E*.
4. Les seules valeurs propres possibles d'un endomorphisme orthogonal sont –1 et 1.

Exercice 9.5

a. Démontrez que si *A* et *B* sont deux matrices orthogonales, alors la matrice *A*·*B* est aussi orthogonale.
b. Que peut-on en déduire pour les isométries vectorielles ?

Rotation

La matrice associée à une rotation dans le plan est $M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

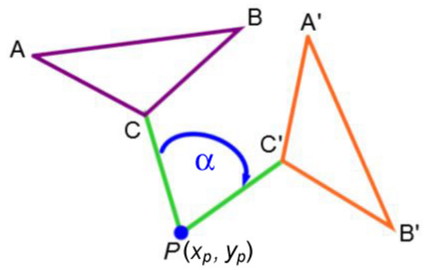
La rotation n'a pas de valeur propre pour $\alpha \neq k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}$.

Cette formule est le résultat de trois opérations successives : translation du point *P* sur l'origine, rotation autour de l'origine, puis translation de l'origine sur le point *P*.

Pour tourner une image autour d'un point $P(x_p, y_p)$, on utilise la formule suivante :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_p \\ y - y_p \end{pmatrix}$$

Rappel
Ici, la rotation se fait dans le sens des aiguilles d'une montre, donc α est un nombre négatif.



Une matrice orthogonale 2 x 2 définit une rotation si et seulement si Dét(M) = +1.

Exercice 9.6

Les endomorphismes donnés par les matrices M ci-dessous sont-ils des rotations ? Si oui, donnez l'angle α.

a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$

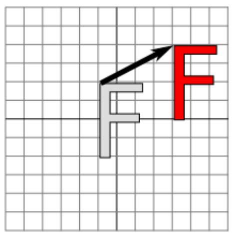
d. $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ **e.** $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ **f.** $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Exercice 9.7

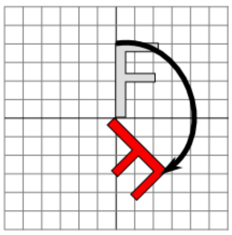
Écrivez sous la forme $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f \end{cases}$ les transformations géométriques ci-dessous.

Attention pour **c.** Les facteurs d'agrandissement sont différents pour x et pour y.

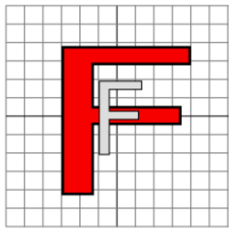
a. translation



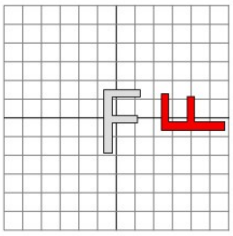
b. rotation de −135°



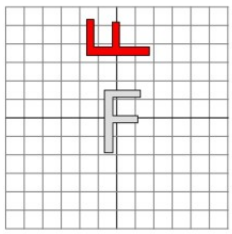
c. mise à l'échelle



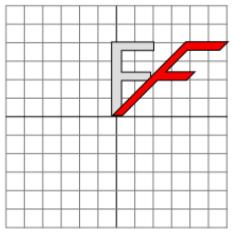
d. rotation + translation



e. rotation + translation



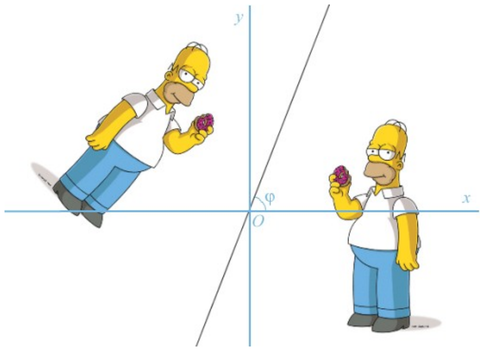
f. cisaillement



Symétrie axiale orthogonale

On considère la symétrie axiale dont l'axe de symétrie passe par l'origine O et forme un angle φ avec l'axe Ox.

La matrice associée est $M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$, où $\alpha = 2\varphi$.



On peut vérifier que cet endomorphisme est orthogonal et que Dét(M) = −1.

On a même ${}^tM = M^{-1} = M$.

Pour les cas particuliers φ = 0°, 90° et 45°, on obtient respectivement :

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ qui est la matrice de la symétrie axiale d'axe Ox

$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est la matrice de la symétrie axiale d'axe Oy

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est la matrice de la symétrie axiale d'axe $y = x$

Un endomorphisme orthogonal du plan est une symétrie axiale orthogonale si et seulement si M est orthogonale et si Dét(M) = −1. Un vecteur propre non nul associé à la valeur propre 1 engendre l'axe de symétrie.

Exercice 9.8

Montrez que l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x;y)=(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y;\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y)$ est orthogonal.

Quelle transformation du plan représente-t-il ?

9.5. Endomorphismes de l'espace

En généralisant les endomorphismes du plan, on obtient quelques résultats analogues pour l'espace.

Homothétie de centre O et de rapport k : $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$

Homothétie de centre O et de rapport −1
ou symétrie centrale de centre O : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Rotation d'angle α autour de l'axe Oz : $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rotation d'angle 180° autour de l'axe Oz
ou symétrie par rapport à l'axe Oz : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Projection parallèle à l'axe Oz sur le plan Oxy : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Projection parallèle au plan *Oxy* sur l'axe *Oz* : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Symétrie par rapport au plan *Oxy* : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 9.9

Donnez les matrices de $\mathbb{R}^3$ de rotation d'angle α autour de :

a. l'axe *Ox*

b. l'axe *Oy*.

9.6. Ce qu'il faut absolument savoir

Déterminer la nature géométrique d'un endomorphisme par construction en connaissant les valeurs propres et les vecteurs propres ❏ ok

Connaître les matrices des principales transformations géométriques ❏ ok

Solutions des exercices

Chapitre 1

1.1. **a.** (8/3 ; –1/3) **b.** (–1 ; 1/2)
c. (2/3 ; –4/3) **d.** $\left(\lambda ; -\frac{1+3\lambda}{4}\right)$

1.2. **a.** (–1/3 ; 1/3 ; 5) **b.** (1/2 ; 0 ; –1/2)
c. (–3+2λ ; –1–λ ; λ) **d.** pas de solution

1.3. 8 rouges et 12 bleues

1.4. Il y a 7 convives qui paieront 22.50 € chacun.

1.5. $x=\frac{-2}{m+1}$; $y=\frac{2(m^2+m+1)}{m+1}$
si m=1, il y a une infinité de solutions de la forme (λ ; 2–λ). Si m = –1, il n'y a pas de solution.

1.6. **a.** 6 fraises **b.** 3 fraises

1.7. (2/9 ; –1/9) ; (–1/3 ; –1/3)

1.8. **a.** 14 et 15 ou –15 et –14 **b.** 11 et 15

Chapitre 2

2.1. **a.** –1 **b.** 2 **c.** –14 **d.** 0

2.2. **a.** –70 **b.** –88 **c.** 30

2.4. **a.** –61 **b.** 0 **c.** –20

2.5. **a.** gauche **b.** droite **c.** A, B, C alignés

2.6. **a.** x = –1/2 ; y = 4 **b.** x = 3 ; y = 3/2
c. pas de solution **d.** x = λ ; $y=\frac{2-\lambda}{3}$

2.7. **a.** x = –2 ; y = –5 ; z = 2
b. x = –5 ; y = –4 ; z = 2
c. x = λ ; y = 1 ; z = λ
d. x = 1/2 ; y = 1; z = 4
e. pas de solution
f. x = λ ; y = μ ; z = 1–λ–μ

Chapitre 3

3.1. L'entreprise devra envoyer aux USA 44'117.65 kg de produit A et 5'882.35 kg de produit B. Le gain sera de 21'176'470 fr.

3.2. 40/11 tonnes de pièces de type 1 et 175/33 tonnes de pièces de type 2. La recette sera de 23'181.82 fr.

3.3. 150 boîtes rouges et 100 boîtes jaunes. Le profit sera de 15'000 fr.

3.4. 50 raquettes ordinaires et 30 grandes. Le bénéfice maximum est de 850 fr.

3.5. Le paysan doit donner 450 g de poudre P1 et 1.2 kg de P2 à sa vache. Le coût journalier minimum se monte à 3.75 fr.

3.6. Le teinturier doit acheter 750 g de produit IND1 et 312.5 g de produit IND2. Il paiera 27.50 fr.

3.7. Le distributeur doit livrer tous les lecteurs DVD chez A à partir de E_1 et aucun à partir de E_2. De plus, il doit livrer 45 lecteurs chez B à partir de E_1 et 15 unités à partir de E_2. Le coût de transport minimum est de 1015 fr.

3.8. **a.** X: 16 g, Y: 4 g, Z: 0 g
b. X: 0 g, Y: 8 g, Z: 12 g

3.9. Il peut y avoir plusieurs solutions optimales si la droite de la fonction objectif est parallèle à un des bords du domaine D.

Chapitre 4

4.1. $AB=\begin{pmatrix} 9 & -3 & 14 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ $CA=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 5 & 6 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$

$BC=\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$ $CB=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 7 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix} 13 & -4 \\ -3 & 16 \end{pmatrix}$

4.2. $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 \\ -\frac{9}{2} & 2 \end{pmatrix}$ $B^{-1}=\frac{1}{32}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & -5 \\ -8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$

$C^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

Chapitre 5

5.2. non

5.5. **a. 1.** non **2.** oui
b. A : oui B : non

5.6. **a.** oui **b.** non **c.** non **d.** non
e. non **f.** oui **g.** non

5.7. Une autre base possible : $e_1(x)=1$, $e_2(x)=1+x$

5.8. $e_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

5.9. Dim = 3. Une base : $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

Chapitre 6

6.1. **a.** oui **b.** non **c.** non **d.** oui
e. non **f.** oui **g.** non **h.** non
i. oui **j.** oui **k.** oui **l.** oui
m. oui

6.2. **a.** $\text{Ker}(h) = \{(0; 0)\}$, $\text{Im}(h) = \mathbb{R}^2$
b. $\text{Ker}(h) = \{(\lambda; \lambda)\}$, $\text{Im}(h)=\{(\lambda; 0), \lambda \in \mathbb{R}\}$
c. $\text{Ker}(h) = \{(0; 0)\}$,
$\text{Im}(h)=\{(\lambda; \mu; \lambda-\mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
d. $\text{Ker}(h) = \{(\lambda; \lambda)\}$, $\text{Im}(h)=\{(\lambda;-\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$
e. $\text{Ker}(h) = \{(0 ; 0)\}$,
$\text{Im}(h)=\{(0; \lambda; \mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
f. $\text{Ker}(h) = \{(-2\lambda; \lambda; 2\lambda)\}$, $\text{Im}(h) = \mathbb{R}^2$
g. $\text{Ker}(h) = \{(0; 0; 0)\}$, $\text{Im}(h) = \mathbb{R}^3$
h. $\text{Ker}(h) = \{\lambda \in \mathbb{R}\}$, $\text{Im}(h)=\{\text{fonctions}\}$

6.3. **a.** b et d sont dans $\text{Im}(f)$
b. $-y_1 + 3y_2 + y_3 = 0$
c. $\text{Ker}(f) = \{(\lambda ; -2\lambda ; 2\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$

6.4. $h(u) = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \end{pmatrix}$ $h(v) = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$h(u+v) = \begin{pmatrix} -6 \\ 13 \end{pmatrix}$ $h(2u) = \begin{pmatrix} -2 \\ 26 \end{pmatrix}$

$h(-3v) = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix}$ $h(2u-3v) = \begin{pmatrix} 13 \\ 26 \end{pmatrix}$

Remarquez bien que $h(u+v) = h(u) + h(v)$, $h(2u) = 2h(u)$, etc.

6.5. **a.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **e.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

f. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **g.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **h.** -

6.6. **a.** $H=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
b. 19.9
c. $H^2 = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 10 \\ 9 & 29 & -11 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

6.7. $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ $w = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$

6.8. **a.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

6.9. **a.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6.10. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

6.11. **a.** $M_3 = \begin{pmatrix} 23 & 31 \\ 34 & 46 \end{pmatrix}$ $M_4 = \begin{pmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{pmatrix}$

$M_5 = \begin{pmatrix} 67 & 91 \\ 78 & 106 \end{pmatrix}$

b. $M_3^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{23}{2} & -\frac{31}{4} \\ -\frac{17}{2} & \frac{23}{4} \end{pmatrix}$

6.12. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

Chapitre 7

7.1. **a.** non, **b.** non, **c.** non, **d.** oui

7.2. **b.**, **e.** et **f.** ne sont pas des endomorphismes.

a. oui ; $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; oui ; $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

c. oui ; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; oui ; $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d. oui ; $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; oui ; $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

7.3. **a.** Ker(f) = $(3\lambda ; -\lambda)$; Im(f) = $(3\lambda ; -\lambda)$
b. Ker(f) = $(\lambda ; 0)$; Im(f) = $(-4\lambda ; 3\lambda)$
c. Ker(f) = $(3\lambda ; \lambda)$; Im(f) = $(0 ; \lambda)$
d. Ker(f) = $\{0\}$; Im(f) = $\mathbb{R}^2$
e. Ker(f) = $(\lambda ; -a\lambda)$; Im(f) = $(\lambda ; 2\lambda)$
f. Ker(f) = $(a\lambda ; -\lambda)$; Im(f) = $(a\lambda ; \lambda)$

7.4. **a.** B_1: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

B_2 : $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$

B_3 : $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$

b. Dans B_1 : $M' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dans B_2 : $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Dans B_3 : $M' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}$

7.5. **a.** $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ **f.** $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & -11 \end{pmatrix}$

7.6. **a.** Dans B_1 : $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Dans B_2 : $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$

b. Dans B_1 : $M' = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Dans B_2 : $M' = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -4 & -4 & 2 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

7.7. **a.** oui, **b.** non, **c.** non, **d.** Oui

7.8. **a.** $\lambda_1 = 3$; $v_1 = (1 ; 1)$
$\lambda_2 = -1$; $v_2 = (3 ; -1)$
b. $\lambda_1 = 1/2$; $v_1 = (2 ; -1)$
$\lambda_2 = 1/4$; $v_2 = (3 ; -1)$

7.10. **a.** $\lambda_1 = 5$; $\lambda_2 = 3$
b. $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
c. $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
d. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -24 \\ 8 & 33 \end{pmatrix}$
e. $A^5 = \begin{pmatrix} -1198 & -4323 \\ 1441 & 4566 \end{pmatrix}$

Chapitre 8

8.1. 2001 : $\begin{pmatrix} 582'000 \\ 418'000 \end{pmatrix}$ 2002 : $\begin{pmatrix} 565'440 \\ 434'560 \end{pmatrix}$

8.2. **a.** $x_k = c_1(0.9)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(0.7)^k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Les chouettes et les rats vont disparaître.

8.3. $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & p \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$. Il faut que $p > 40$.

8.4. **a.** La fertilité débute à 15 ans, puis diminue dès 30 ans. Le taux de fertilité peut être > 1 (nombre de filles par femme sur une période de 5 ans).
b. La mortalité infantile est plus élevée à la naissance.
c. Les femmes survivent, mais n'ont plus d'enfant.

8.5. **a.** On considère deux classes d'âge. 25% des femelles de la première classe d'âge donnent naissance à une femelle. 75% survivent et donnent naissance à une femelle en moyenne.
b. Valeurs propres 1 et –3/4, correspondant aux vecteurs (4 ; 3) et (1 ; –1), resp. Une population répartie en deux classes d'âge dans le rapport 4:3 est stable.
c. $L^n = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4+3(-0.75)^n & 4-4(-0.75)^n \\ 3-3(-0.75)^n & 3+4(-0.75)^n \end{pmatrix}$.
La population totale reste stable et tend vers une répartition dans le rapport 4:3.

8.6. **a.** On considère deux classes d'âge. Les femelles de la première classe d'âge donnent naissance à deux femelles en moyenne. 25% survivent et donnent naissance à 12 femelles en moyenne.
b. Valeurs propres 3 et –1, correspondant aux vecteurs propres (12 ; 1) et (–4 ; 1), resp. Une population répartie en deux classes d'âge dans le rapport 12:1 triple à chaque génération.
c. $L^n = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 12\cdot 3^n + 4(-1)^n & 48\cdot 3^n - 48(-1)^n \\ 3^n - (-1)^n & 4\cdot 3^n + 12(-1)^n \end{pmatrix}$.
La population totale triple à chaque génération et tend vers une répartition dans le rapport 12:1.

8.7. **a.** $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{7}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 \end{pmatrix}$

b. $p_1 = \begin{pmatrix} 2400 \\ 933 \\ 200 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} 1333 \\ 1867 \\ 133 \end{pmatrix}$, $p_3 = \begin{pmatrix} 2133 \\ 1037 \\ 267 \end{pmatrix}$,
$p_4 = \begin{pmatrix} 1571 \\ 1659 \\ 148 \end{pmatrix}$

c. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2/3$, $\lambda_3 = -1/3$
$v_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ -14 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$

d.
$p_0 = \begin{pmatrix} 1200 \\ 1400 \\ 500 \end{pmatrix} = 200\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} - 100\begin{pmatrix} 12 \\ -14 \\ 3 \end{pmatrix} + 200\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$
$p_\infty = 200\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1800 \\ 1400 \\ 200 \end{pmatrix}$

8.8. $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Si le secteur des biens produit 4 unités monétaires, le secteur de services doit en produire 5.

8.9. $M = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.75 & 0.4 \\ 0.25 & 0.15 & 0.4 \\ 0.55 & 0.10 & 0.2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0.412 \\ 0.271 \\ 0.317 \end{pmatrix}$

8.10. $\left(\frac{3}{7}; \frac{4}{7}\right)$

8.11. $T = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.7 \\ 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 0.85 \\ 0.15 \end{pmatrix}$;

$T\cdot E = \begin{pmatrix} 0.87 \\ 0.13 \end{pmatrix}$; $T^2\cdot E = \begin{pmatrix} 0.874 \\ 0.126 \end{pmatrix}$;

En bonne santé : 7/8 = 87.5%

8.12. **a.** $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$; **b.** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c. $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ **d.** $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Chapitre 9

9.1. M_1 : homothétie
M_2 : homothétie selon Ox
M_3 : miroir de plan Oxz
M_4 : homothétie + proj. orthog. sur le plan Oxy

9.2. **a.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ **e.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **f.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

g. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **h.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

i. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **j.** $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

k. $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ **l.** $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

9.3. **a.** le point $(-2 ; 2)$
b. la droite $x + y = 0$
c. $(\lambda ; -\lambda)$
d. projection orthogonale sur la droite $x+y = 0$

9.4.

b. **1.** $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,\ v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1,\ v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix}$

3. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1,\ v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1,\ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2,\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 0,\ v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

7. pas de valeurs propres réelles

8. pas de valeurs propres réelles

d.

1. projection sur l'axe $y = \frac{1}{3}x$.

2. affinité de rapport -1 dans la direction $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par rapport à l'axe $y = \sqrt{3}\,x$.

3. affinité de rapport -1 dans la direction $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ par rapport à l'axe $y = \frac{1}{2}x$.

4. affinité de rapport 4 dans la direction $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ par rapport à l'axe $y = -x$.

5. affinité de rapport 3 dans la direction $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ par rapport à l'axe $y = x$, combinée à une affinité de rapport 2 dans la direction $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ par rapport à l'axe $y = 0$.

6. projection sur l'axe $y = -x$.

7. homothétie + rotation.

8. rotation d'angle t.

9.5. **a.** $(A \cdot B) \cdot {}^t(A \cdot B) = A \cdot B \cdot {}^tB \cdot {}^tA = A \cdot {}^tA = I$
b. La composée de deux isométries est une isométrie

9.6. **a.** oui, 0° **b.** oui, +180° **c.** oui, $-t$
d. oui, −30° **e.** non **f.** oui, +135°

9.7. **a.** $\begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y + 2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x' = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ y' = -\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{cases}$

c. $\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 2y \end{cases}$

d. $\begin{cases} x' = -y + 4 \\ y' = x \end{cases}$

e. $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x + 4 \end{cases}$

f. $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \end{cases}$

9.8. ${}^tM = M^{-1}$ et $\text{Dét}(M) = -1$
Symétrie orthogonale d'axe passant par l'origine et d'angle $\varphi = 30°$.

9.9. **a.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$