Solutions des exercices

Chapitre 1

1.1. **a.** $(8/3\ ;\ -1/3)$ **b.** $(-1\ ;\ 1/2)$
c. $(2/3\ ;\ -4/3)$ **d.** $(\lambda\ ;\ -\frac{1+3\lambda}{4})$

1.2. **a.** $(-1/3\ ;\ 1/3\ ;\ 5)$ **b.** $(1/2\ ;\ 0\ ;\ -1/2)$
c. $(-3+2\lambda\ ;\ -1-\lambda\ ;\ \lambda)$ **d.** pas de solution

1.3. 8 rouges et 12 bleues

1.4. Il y a 7 convives qui paieront 22.50 € chacun.

1.5. $x=\frac{-2}{m+1}\ ;\ y=\frac{2(m^2+m+1)}{m+1}$
si m=1, il y a une infinité de solutions de la forme $(\lambda\ ;\ 2-\lambda)$. Si $m = -1$, il n'y a pas de solution.

1.6. **a.** 6 fraises **b.** 3 fraises

1.7. $(2/9\ ;\ -1/9)\ ;\ (-1/3\ ;\ -1/3)$

1.8. **a.** 14 et 15 ou −15 et −14 **b.** 11 et 15

Chapitre 2

2.1. **a.** −1 **b.** 2 **c.** −14 **d.** 0

2.2. **a.** −70 **b.** −88 **c.** 30

2.4. **a.** −61 **b.** 0 **c.** −20

2.5. **a.** gauche **b.** droite **c.** A, B, C alignés

2.6. **a.** $x = -1/2\ ;\ y = 4$ **b.** $x = 3\ ;\ y = 3/2$
c. pas de solution **d.** $x = \lambda\ ;\ y=\frac{2-\lambda}{3}$

2.7. **a.** $x = -2\ ;\ y = -5\ ;\ z = 2$
b. $x = -5\ ;\ y = -4\ ;\ z = 2$
c. $x = \lambda\ ;\ y = 1\ ;\ z = \lambda$
d. $x = 1/2\ ;\ y = 1;\ z = 4$
e. pas de solution
f. $x = \lambda\ ;\ y = \mu\ ;\ z = 1-\lambda-\mu$

Chapitre 3

3.1. L'entreprise devra envoyer aux USA 44'117.65 kg de produit *A* et 5'882.35 kg de produit *B*. Le gain sera de 21'176'470 fr.

3.2. 40/11 tonnes de pièces de type 1 et 175/33 tonnes de pièces de type 2. La recette sera de 23'181.82 fr.

3.3. 150 boîtes rouges et 100 boîtes jaunes. Le profit sera de 15'000 fr.

3.4. 50 raquettes ordinaires et 30 grandes. Le bénéfice maximum est de 850 fr.

3.5. Le paysan doit donner 450 g de poudre P1 et 1.2 kg de P2 à sa vache. Le coût journalier minimum se monte à 3.75 fr.

3.6. Le teinturier doit acheter 750 g de produit IND1 et 312.5 g de produit IND2. Il paiera 27.50 fr.

3.7. Le distributeur doit livrer tous les lecteurs DVD chez A à partir de E_1 et aucun à partir de E_2. De plus, il doit livrer 45 lecteurs chez B à partir de E_1 et 15 unités à partir de E_2. Le coût de transport minimum est de 1015 fr.

3.8. **a.** X: 16 g, Y: 4 g, Z: 0 g
b. X: 0 g, Y: 8 g, Z: 12 g

3.9. Il peut y avoir plusieurs solutions optimales si la droite de la fonction objectif est parallèle à un des bords du domaine D.

Chapitre 4

4.1. $AB = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 14 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ $CA = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 5 & 6 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$

$BC = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$ $CB = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 7 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 13 & -4 \\ -3 & 16 \end{pmatrix}$

4.2. $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & -1\\ -\frac{9}{2} & 2\end{pmatrix}$ $B^{-1}=\frac{1}{32}\begin{pmatrix}6 & 2 & 6\\ 3 & 1 & -5\\ -8 & 8 & 8\end{pmatrix}$

$C^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}4 & 0 & 8\\ 3 & 3 & 0\\ 2 & 6 & 4\end{pmatrix}$

Chapitre 5

5.2. non

5.5. **a. 1.** non **2.** oui
b. A : oui B : non

5.6. **a.** oui **b.** non **c.** non **d.** non
e. non **f.** oui **g.** non

5.7. Une autre base possible : $e_1(x)=1$, $e_2(x)=1+x$

5.8. $e_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{6}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\ \frac{5}{6}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

5.9. Dim = 3. Une base : $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$

Chapitre 6

6.1. **a.** oui **b.** non **c.** non **d.** oui
e. non **f.** oui **g.** non **h.** non
i. oui **j.** oui **k.** oui **l.** oui
m. oui

6.2. **a.** $\mathrm{Ker}(h) = \{(0; 0)\}$, $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}^2$
b. $\mathrm{Ker}(h) = \{(\lambda; \lambda)\}$, $\mathrm{Im}(h)=\{(\lambda; 0), \lambda \in \mathbb{R}\}$
c. $\mathrm{Ker}(h) = \{(0; 0)\}$,
$\mathrm{Im}(h)=\{(\lambda; \mu; \lambda-\mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
d. $\mathrm{Ker}(h) = \{(\lambda; \lambda)\}$, $\mathrm{Im}(h)=\{(\lambda;-\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$
e. $\mathrm{Ker}(h) = \{(0 ; 0)\}$,
$\mathrm{Im}(h)=\{(0; \lambda; \mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
f. $\mathrm{Ker}(h) = \{(-2\lambda; \lambda; 2\lambda)\}$, $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}^2$
g. $\mathrm{Ker}(h) = \{(0; 0; 0)\}$, $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}^3$
h. $\mathrm{Ker}(h) = \{\lambda \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{Im}(h)=\{\text{fonctions}\}$

6.3. **a.** b et d sont dans $\mathrm{Im}(f)$
b. $-y_1 + 3y_2 + y_3 = 0$
c. $\mathrm{Ker}(f) = \{(\lambda ; -2\lambda ; 2\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$

6.4. $h(u)=\begin{pmatrix}-1\\ 13\end{pmatrix}$ $h(v)=\begin{pmatrix}-5\\ 0\end{pmatrix}$
$h(u+v)=\begin{pmatrix}-6\\ 13\end{pmatrix}$ $h(2u)=\begin{pmatrix}-2\\ 26\end{pmatrix}$
$h(-3v)=\begin{pmatrix}15\\ 0\end{pmatrix}$ $h(2u-3v)=\begin{pmatrix}13\\ 26\end{pmatrix}$
Remarquez bien que $h(u+v) = h(u) + h(v)$, $h(2u) = 2h(u)$, etc.

6.5. **a.** $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$
d. $\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ **e.** $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$
f. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$ **g.** $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ **h.** -

6.6. **a.** $H=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ -3 & -6 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$
b. 19.9
c. $H^2=\begin{pmatrix}3 & -8 & 10\\ 9 & 29 & -11\\ 3 & 5 & 0\end{pmatrix}$

6.7. $v=\begin{pmatrix}2\\ 9\end{pmatrix}$ $w=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}6\\ -7\end{pmatrix}$

6.8. **a.** $\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$
c. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

6.9. **a.** $\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ -1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
c. $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

6.10. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & -4\\ -4 & -1\end{pmatrix}$

6.11. **a.** $M_3 = \begin{pmatrix} 23 & 31 \\ 34 & 46 \end{pmatrix}$ $M_4 = \begin{pmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{pmatrix}$

$M_5 = \begin{pmatrix} 67 & 91 \\ 78 & 106 \end{pmatrix}$

b. $M_3^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{23}{2} & -\frac{31}{4} \\ -\frac{17}{2} & \frac{23}{4} \end{pmatrix}$

6.12. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

Chapitre 7

7.1. **a.** non, **b.** non, **c.** non, **d.** oui

7.2. **b.**, **e.** et **f.** ne sont pas des endomorphismes.

a. oui ; $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; oui ; $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

c. oui ; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; oui ; $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d. oui ; $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; oui ; $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

7.3. **a.** Ker(f) = (3λ ; $-\lambda$) ; Im(f) = (3λ ; $-\lambda$)
b. Ker(f) = (λ ; 0) ; Im(f) = (-4λ ; 3λ)
c. Ker(f) = (3λ ; λ) ; Im(f) = (0 ; λ)
d. Ker(f) = {0} ; Im(f) = $\mathbb{R}^2$
e. Ker(f) = (λ ; $-a\lambda$) ; Im(f) = (λ ; 2λ)
f. Ker(f) = ($a\lambda$; $-\lambda$) ; Im(f) = ($a\lambda$; λ)

7.4. **a.** B_1: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

B_2 : $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$

B_3 : $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$

b. Dans B_1 : $M' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dans B_2 : $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Dans B_3 : $M' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}$

7.5. **a.** $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ **f.** $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & -11 \end{pmatrix}$

7.6. **a.** Dans B_1 : $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Dans B_2 : $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$

b. Dans B_1 : $M' = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Dans B_2 : $M' = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -4 & -4 & 2 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

7.7. **a.** oui, **b.** non, **c.** non, **d.** Oui

7.8. **a.** $\lambda_1 = 3$; $v_1 = (1 ; 1)$
$\lambda_2 = -1$; $v_2 = (3 ; -1)$
b. $\lambda_1 = 1/2$; $v_1 = (2 ; -1)$
$\lambda_2 = 1/4$; $v_2 = (3 ; -1)$

7.10. **a.** $\lambda_1 = 5$; $\lambda_2 = 3$
b. $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
c. $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
d. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -24 \\ 8 & 33 \end{pmatrix}$
e. $A^5 = \begin{pmatrix} -1198 & -4323 \\ 1441 & 4566 \end{pmatrix}$

Chapitre 8

8.1. 2001 : $\begin{pmatrix} 582'000 \\ 418'000 \end{pmatrix}$ 2002 : $\begin{pmatrix} 565'440 \\ 434'560 \end{pmatrix}$

8.2. **a.** $x_k = c_1(0.9)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(0.7)^k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Les chouettes et les rats vont disparaître.

8.3. $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & p \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$. Il faut que $p > 40$.

8.4. **a.** La fertilité débute à 15 ans, puis diminue dès 30 ans. Le taux de fertilité peut être > 1 (nombre de filles par femme sur une période de 5 ans).
b. La mortalité infantile est plus élevée à la naissance.
c. Les femmes survivent, mais n'ont plus d'enfant.

8.5. **a.** On considère deux classes d'âge. 25% des femelles de la première classe d'âge donnent naissance à une femelle. 75% survivent et donnent naissance à une femelle en moyenne.
b. Valeurs propres 1 et −3/4, correspondant aux vecteurs (4 ; 3) et (1 ; −1), resp. Une population répartie en deux classes d'âge dans le rapport 4:3 est stable.
c. $L^n = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 + 3(-0.75)^n & 4 - 4(-0.75)^n \\ 3 - 3(-0.75)^n & 3 + 4(-0.75)^n \end{pmatrix}$.
La population totale reste stable et tend vers une répartition dans le rapport 4:3.

8.6. **a.** On considère deux classes d'âge. Les femelles de la première classe d'âge donnent naissance à deux femelles en moyenne. 25% survivent et donnent naissance à 12 femelles en moyenne.
b. Valeurs propres 3 et −1, correspondant aux vecteurs propres (12 ; 1) et (−4 ; 1), resp. Une population répartie en deux classes d'âge dans le rapport 12:1 triple à chaque génération.
c. $L^n = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 12\cdot 3^n + 4(-1)^n & 48\cdot 3^n - 48(-1)^n \\ 3^n - (-1)^n & 4\cdot 3^n + 12(-1)^n \end{pmatrix}$.
La population totale triple à chaque génération et tend vers une répartition dans le rapport 12:1.

8.7. **a.** $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{7}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 \end{pmatrix}$

b. $p_1 = \begin{pmatrix} 2400 \\ 933 \\ 200 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} 1333 \\ 1867 \\ 133 \end{pmatrix}$, $p_3 = \begin{pmatrix} 2133 \\ 1037 \\ 267 \end{pmatrix}$, $p_4 = \begin{pmatrix} 1571 \\ 1659 \\ 148 \end{pmatrix}$

c. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2/3$, $\lambda_3 = -1/3$

$v_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ -14 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$

d.

$$p_0 = \begin{pmatrix} 1200 \\ 1400 \\ 500 \end{pmatrix} = 200\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} - 100\begin{pmatrix} 12 \\ -14 \\ 3 \end{pmatrix} + 200\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$p_\infty = 200\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1800 \\ 1400 \\ 200 \end{pmatrix}$$

8.8. $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Si le secteur des biens produit 4 unités monétaires, le secteur de services doit en produire 5.

8.9. $M = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.75 & 0.4 \\ 0.25 & 0.15 & 0.4 \\ 0.55 & 0.10 & 0.2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0.412 \\ 0.271 \\ 0.317 \end{pmatrix}$

8.10. $\left(\frac{3}{7}; \frac{4}{7}\right)$

8.11. $T = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.7 \\ 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 0.85 \\ 0.15 \end{pmatrix}$;

$T\cdot E = \begin{pmatrix} 0.87 \\ 0.13 \end{pmatrix}$; $T^2\cdot E = \begin{pmatrix} 0.874 \\ 0.126 \end{pmatrix}$;

En bonne santé : 7/8 = 87.5%

8.12. **a.** $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$; **b.** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c. $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ **d.** $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Chapitre 9

9.1. M_1 : homothétie
M_2 : homothétie selon *Ox*
M_3 : miroir de plan *Oxz*
M_4 : homothétie + proj. orthog. sur le plan *Oxy*

9.2. **a.** $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}$ **e.** $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ **f.** $\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

g. $\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$ **h.** $\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$

i. $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ **j.** $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$

k. $\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$ **l.** $\begin{pmatrix}1 & k\\0 & 1\end{pmatrix}$

9.3. **a.** le point $(-2\,;2)$
b. la droite $x + y = 0$
c. $(\lambda\,; -\lambda)$
d. projection orthogonale sur la droite $x+y = 0$

9.4.

b. **1.** $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,\ v_1 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

2. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1,\ v_1 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\1\end{pmatrix}$

3. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1,\ v_1 = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

4. $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1,\ v_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

5. $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2,\ v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

6. $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 0,\ v_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

7. pas de valeurs propres réelles

8. pas de valeurs propres réelles

d.

1. projection sur l'axe $y=\frac{1}{3}x$.

2. affinité de rapport −1 dans la direction $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ par rapport à l'axe $y=\sqrt{3}\,x$.

3. affinité de rapport −1 dans la direction $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ par rapport à l'axe $y=\frac{1}{2}x$.

4. affinité de rapport 4 dans la direction $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ par rapport à l'axe $y = -x$.

5. affinité de rapport 3 dans la direction $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ par rapport à l'axe $y = x$, combinée à une affinité de rapport 2 dans la direction $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ par rapport à l'axe $y = 0$.

6. projection sur l'axe $y = -x$.

7. homothétie + rotation.

8. rotation d'angle t.

9.5. **a.** $(A\cdot B)\cdot{}^t(A\cdot B) = A\cdot B\cdot{}^tB\cdot{}^tA = A\cdot{}^tA = I$
b. La composée de deux isométries est une isométrie

9.6. **a.** oui, 0° **b.** oui, +180° **c.** oui, $-t$
d. oui, −30° **e.** non **f.** oui, +135°

9.7. **a.** $\begin{cases}x' = x + 4\\ y' = y + 2\end{cases}$

b. $\begin{cases}x' = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\\ y' = -\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y\end{cases}$

c. $\begin{cases}x' = 3x\\ y' = 2y\end{cases}$

d. $\begin{cases}x' = -y + 4\\ y' = x\end{cases}$

e. $\begin{cases}x' = -y\\ y' = x + 4\end{cases}$

f. $\begin{cases}x' = x + y\\ y' = y\end{cases}$

9.8. ${}^tM = M^{-1}$ et Dét$(M) = -1$
Symétrie orthogonale d'axe passant par l'origine et d'angle $\varphi = 30°$.

9.9. **a.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$