3. Introduction à la programmation linéaire

La programmation linéaire est une branche de l'optimisation permettant de résoudre de nombreux problèmes économiques et industriels.

3.1. L'artisan chocolatier

Remarque
Le chocolat est composé de beaucoup plus d'ingrédients (notamment du sucre), mais, pour la clarté de l'exemple, on s'est ici limité à trois.

À l'approche des fêtes de Pâques, un artisan chocolatier décide de confectionner des œufs en chocolat. En allant inspecter ses réserves, il constate qu'il lui reste 18 kg de cacao, 8 kg de noisettes et 14 kg de lait.
Il a deux spécialités : l'œuf *Extra* et l'œuf *Sublime*. Un œuf *Extra* nécessite 1 kg de cacao, 1 kg de noisettes et 2 kg de lait. Un œuf *Sublime* nécessite 3 kg de cacao, 1 kg de noisettes et 1 kg de lait.
Il fera un profit de 20 fr. en vendant un œuf *Extra*, et de 30 fr. en vendant un œuf *Sublime*.
Combien d'œufs *Extra* et *Sublime* doit-il fabriquer pour faire le plus grand bénéfice possible ?

Formulation du problème

Notons x_1 le nombre d'œufs *Extra* et x_2 le nombre d'œufs *Sublime* à produire. Le chocolatier cherche à **maximiser** la **fonction objectif** :

C'est l'expression du bénéfice.

$$\max \ z = 20x_1 + 30\,x_2$$

L'artisan ne peut pas utiliser plus de :
18 kg de cacao
8 kg de noisettes
14 kg de lait.

Étant données les réserves du chocolatier, les **contraintes** suivantes devront être satisfaites :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \end{cases}$$

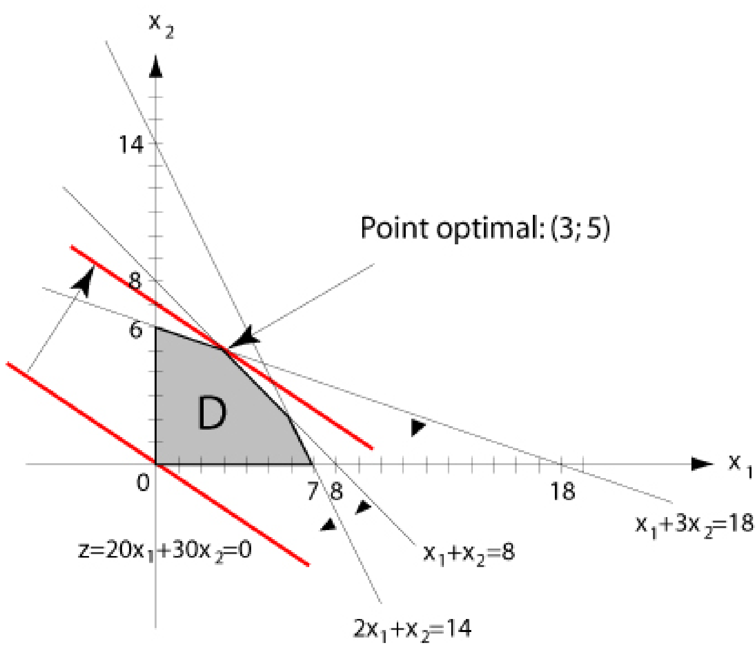
Il ne peut pas produire un nombre négatif d'œufs !

Évidemment, on a encore les deux contraintes : $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$.

Une inéquation définit un **demi-plan** où la condition est satisfaite.

Démarche
1. On dessine les demi-plans des contraintes. On trace la **droite frontière** et on indique par un petit triangle le demi-plan défini par l'inéquation (la droite frontière est obtenue en remplaçant ≤ par =).
2. On détermine le domaine *D* définissant l'ensemble des points satisfaisant toutes les contraintes. Le domaine *D* est l'intersection de tous les demi-plans.
3. On trace la droite représentant la fonction objectif et passant par l'origine.
4. On translate la droite de la fonction objectif selon son **vecteur normal**, ici (20, 30).
5. Le point optimal est le dernier point du domaine *D* que la droite de la fonction objectif touchera lors de son déplacement.

Résolution graphique



Truc pour repérer rapidement le bon demi-plan défini par une inéquation : regarder si le point (0 ; 0) est du bon côté de la droite frontière.

Réponse au problème

Le point optimal est (3 ; 5), ce qui signifie que $x_1 = 3$ et $x_2 = 5$.
S'il veut maximiser son bénéfice, le chocolatier doit donc confectionner 3 œufs *Extra* et 5 œufs *Sublime*.
Son bénéfice sera de $20 \cdot 3 + 30 \cdot 5 = 210$ fr.
Il utilisera 18 kg de cacao, 8 kg de noisettes et 11 kg de lait.

Remarques générales

Une autre méthode (plus sûre mais plus longue) pour trouver le point optimal consisterait à tester tous les sommets et garder le meilleur.

1. Dans cet exemple introductif, le résultat est en nombres entiers, ce n'est de loin pas toujours le cas.

2. On constate que le chocolatier va utiliser complètement deux de ces trois ingrédients.

3. Seuls les couples $(x_1 ; x_2) \in D$ satisfont toutes les contraintes. Mais en fait, la solution optimale sera **toujours** l'un des sommets du polygone délimitant le domaine D.

4. Faites un dessin suffisamment grand pour être précis. Ne le placez pas tout en bas de votre feuille, car vous serez embêté pour dessiner la droite de la fonction objectif.

5. Le vecteur normal de la droite définissant la fonction objectif indique le sens dans lequel on doit la translater pour trouver le point optimal.

Il se trouve facilement : la droite $ax_1 + bx_2 + c$ a pour vecteur normal $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

6. Si le vecteur normal indique un **déplacement vers le haut**, la fonction objectif doit couper l'axe Ox_2 le plus haut possible dans le cas d'une maximisation, et le plus bas possible dans le cas d'une minimisation, tout en touchant le domaine D.

7. Si le vecteur normal indique un **déplacement vers le bas**, la fonction objectif doit couper l'axe Ox_2 le plus bas possible dans le cas d'une maximisation, et le plus haut possible dans le cas d'une minimisation, tout en touchant le domaine D.

8. Si le vecteur normal est un **vecteur horizontal** (cas rare mais possible), la fonction objectif ne coupera pas l'axe Ox_2. Le point optimal sera, selon les cas, le plus éloigné ou le plus proche de l'axe Ox_2.

3.2. Exercices

Pour chacun des exercices, donnez la fonction objectif à maximiser ou à minimiser, énumérez toutes les contraintes, déterminez graphiquement la solution et calculez-la algébriquement.

Exercice 3.1

Une entreprise suisse fabrique deux produits qu'elle désire vendre aux USA.
Le produit *A* rapporte 400 fr./kg et le produit *B* rapporte 600 fr./kg.
Ayant des moyens financiers limités, la société ne peut affréter qu'un seul avion. Celui-ci ne peut transporter que 50'000 kg et a un volume de 2000 m^3.
Le produit *A* a un volume de 0.032 m^3 par kg ; le produit *B* a un volume de 0.1 m^3 par kg.
Combien de kg de chaque produit l'entreprise doit-elle mettre dans l'avion afin de maximiser ses gains ?

Exercice 3.2

Pour produire des pièces de fonte, une entreprise dispose d'une fonderie et d'un atelier de mécanique. On donne le tableau des consommations suivant :

	Fonderie	Atelier	Énergie	Recette par tonne
Une tonne de pièces de type 1	10 h	5 h	14 kWh	2000 fr.
Une tonne de pièces de type 2	12 h	4 h	30 kWh	3000 fr.
Quantités disponibles	100 h	45 h	210 kWh	–

Combien de tonnes de pièces de chaque type faut-il fabriquer pour maximiser la recette ?

Exercice 3.3

Une menuiserie s'est spécialisée dans la fabrication de boîtes en bois. En prévision d'une grosse commande, elle décide de remplir ses stocks.
Un ouvrier produit de grandes boîtes rouges et un autre de petites boîtes jaunes.
Chaque boîte rouge a un volume de 20 dm^3, chaque boîte jaune a un volume de 10 dm^3.
L'armoire prévue pour stocker les boîtes a un volume de 4000 dm^3.
Pour des raisons techniques, le premier ouvrier ne peut produire au maximum que 150 boîtes rouges et le deuxième que 200 boîtes jaunes.
Sachant que les boîtes rouges rapportent 80 fr. et les boîtes jaunes 30 fr., combien la menuiserie doit-elle fabriquer de boîtes rouges et de boîtes jaunes pour maximiser son profit ?

Exercice 3.4

Un fabricant de raquettes de tennis fait un bénéfice de 8 fr. sur chaque raquette ordinaire et de 15 fr. sur chaque grande raquette. Pour satisfaire à la demande des vendeurs, la production journalière de raquettes ordinaires devrait se situer entre 30 et 80, et la production journalière de grandes raquettes entre 10 et 30. Pour maintenir une bonne qualité, le nombre total de raquettes produites ne devrait pas dépasser 80 par jour.
Combien de raquettes de chaque type faudrait-il fabriquer quotidiennement pour réaliser un bénéfice maximum ?

Exercice 3.5

Pour nourrir sa vache, un paysan dispose de deux poudres alimentaires P_1 et P_2 composées d'ingrédients *A, B* et *C*.
Un sac de poudre P_1 pèse 900 g et contient 100 g d'ingrédients *A*, 200 g de *B* et 600 g de *C*.
Un sac de poudre P_2 pèse 600 g et contient 200 g de chacun des trois ingrédients.
Chaque jour, la vache doit consommer au moins 300 g de *A*, 500 g de *B* et 700 g de *C*.
Les prix respectifs par kg de P_1 et P_2 sont respectivement 3 fr. et 2 fr.
Quelle dépense journalière minimale le paysan doit-il envisager, de sorte que sa vache reçoive une nourriture suffisante ?

Exercice 3.6

Un teinturier dispose de deux différents produits sous forme de poudre pour colorer du tissu brut en couleur indigo. Ces deux produits, IND_1 et IND_2, contiennent trois substances différentes.
La substance A est contenue à raison de 500 g par kg de poudre dans IND_1 et à raison de 400 g par kg de poudre dans IND_2.
La substance B est contenue à raison de 150 g par kg de poudre dans IND_1 et à raison de 50 g par kg de poudre dans IND_2.
La substance C n'est contenue que dans le produit IND_1 et ceci à raison de 20 g par kg.
Dans un bain qui permet de teinter 10 kg de tissu, il faut au moins 500 g de la substance A, 100 g de B et 5 g de C. De plus, la quantité de substance C ne doit pas dépasser 15 g par bain.
Sachant que le produit IND_1 coûte 20.- par kg et que le produit IND_2 coûte 40.- par kg, quel est le prix minimal que le teinturier devra payer pour pouvoir colorer 10 kg de tissu ?

Exercice 3.7

Un distributeur de lecteurs de DVD a deux entrepôts E_1 et E_2. Il y a 80 unités entreposées à E_1 et 70 unités à E_2. Deux clients, A et B, commandent respectivement 35 et 60 unités. Les coûts de transport à partir de chaque entrepôt jusque chez A et B sont déterminés en fonction du tableau ci-dessous :

Entrepôt	Client	Coût de transport par unité
E_1	A	8 fr.
E_1	B	12 fr.
E_2	A	10 fr.
E_2	B	13 fr.

Comment répartir la commande pour que le coût de transport soit minimum ?

Exercice 3.8

Trois substances X, Y et Z contiennent chacune quatre ingrédients A, B, C et D. Le pourcentage de chaque ingrédient et le coût, en centimes par gramme, de chaque substance sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

Substance	Ingrédients				Coût par gramme
	A	***B***	***C***	***D***	
X	20 %	10 %	25 %	45 %	25 ct.
Y	20 %	40 %	15 %	25 %	35 ct.
Z	10 %	20 %	25 %	45 %	50 ct.

a. Si le coût doit être minimal, combien de grammes de chaque substance faudrait-il amalgamer pour obtenir un mélange de 20 grammes contenant au moins 14 % de A, 16 % de B et 20 % de C ?

b. Quel serait le mélange le plus coûteux ?

Exercice 3.9

Peut-il y avoir plusieurs solutions optimales à un problème de programmation linéaire ?
Si oui, quand cela arrive-t-il ?
Si non, pourquoi cela ne peut-il pas arriver ?

3.3. Ce qu'il faut absolument savoir

Poser et résoudre graphiquement un problème d'optimisation linéaire ❑ ok