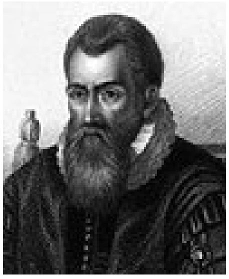
6. Logarithmes et exponentielles

6.1. Un peu d'histoire



John **Napier** (1550-1617)

John **Napier** est né à Merchiston Castle, aux environs d'Édimbourg. Vers la fin du 16ème siècle, préoccupé par le fait que le progrès scientifique était en quelque sorte freiné par des calculs numériques longs et pénibles, il concentra toutes ses forces au développement de méthodes susceptibles de réduire ce calcul fastidieux. « *Il n'y a rien de plus pénible, dans la pratique des mathématiques, […] que ces multiplications, divisions, extractions de racines carrées et cubiques de grands nombres, qui, à côté d'une assommante perte de temps, engendrent pour la plupart nombre d'erreurs insaisissables. [...] Remplaçons les nombres par d'autres, qui fonctionneront seulement par addition et soustraction, division par deux ou trois*. »
Après vingt ans de travail, il livre en 1614 son célèbre traité intitulé *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, qui décrit son système de logarithmes et l'usage qu'il veut en faire. Un second ouvrage, intitulé *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, publié en 1619, contient le premier traité ainsi que les procédés de construction des tables de logarithmes.
La publication du traité de 1614 eut un impact considérable et, parmi les admirateurs les plus enthousiastes de ce nouveau système, il faut compter Henry **Briggs** (1561-1630), professeur de géométrie d'Oxford. C'est à Briggs que l'on doit la naissance des logarithmes en base 10, aussi appelés à « base vulgaire » ou *logarithmes de Briggs*.
On sait aujourd'hui que Jost **Bürgi** (1552-1632) a développé des idées similaires à celles de Napier, en Suisse, à la même époque. On prétend même de Bürgi a conçu l'idée de logarithme dès 1588, mais il perdit tous ses droits de priorité en publiant ses résultats quelques années après le *Mirifici* de Napier. Les travaux de Bürgi furent en effet publiés à Prague en 1620 sous le titre *Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen*.

Jost **Bürgi** (1552-1632)

L'invention des logarithmes a eu un impact considérable sur la structure des mathématiques et décupla les méthodes de calcul des astronomes.

6.2. Introduction

Dans la réalité, c'est plutôt 1 ou 2 % !

Imaginons un millionnaire qui place son argent dans une banque très généreuse qui propose un taux d'intérêt à 100 %, ce qui signifie que la fortune du millionnaire doublera chaque année.
S'il place un million à la banque l'année 0, voici donc comment augmentera sa fortune :

années (n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
fortune en millions (F)	1	2	4	8	16	32	64	128	256

S'il cherche le numéro de l'année où il possédait une fortune F, il l'appellera le logarithme de sa fortune, soit $n = \log(F)$. Nous dirons que ce logarithme est en base 2, parce que F est multiplié par 2 tous les ans.
Ainsi, $0 = \log_2(1)$, $1 = \log_2(2)$, $2 = \log_2(4)$, etc.
On a la relation générale :

Exemple

$10^x = 9 \Leftrightarrow x = \log_{10}(9)$

$$b^x = u \Leftrightarrow x = \log_b(u) \qquad (b > 0,\ b \neq 1,\ u > 0)$$

Regardons à nouveau le tableau pour voir apparaître une relation très intéressante : on sait que $2 \cdot 16 = 32$; si l'on regarde la relation qui lie les logarithmes de ces trois nombres, on voit que $\log_2(2) + \log_2(16) = \log_2(32)$. En effet, $1 + 4 = 5$.

Depuis la fin des années 1970, les calculatrices ont avantageusement remplacé les tables de logarithmes. Auparavant, les lycéens passaient beaucoup de temps à apprendre à utiliser les « tables de logs ».

On retrouve l'idée fondatrice des logarithmes, à savoir que l'on a pu remplacer une multiplication par une division, moyennant l'usage d'une table. L'intérêt était évident quand on travaillait avec des grands nombres (en astronomie par exemple), puisque l'addition de deux nombres (même grands) est bien plus simple et rapide que la multiplication.
La formule générale est la suivante :

$$\log_b(u \cdot v) = \log_b(u) + \log_b(v)$$

Ce livre existe vraiment (les pages sont numérotées de façon classique). Il s'intitule « Les puissances de dix », aux éditions Pour la Science, diffusion Belin (ISBN 2-9029-1833-X).

Imaginons maintenant que nous voulions réaliser un livre d'images carrées (de même taille) dont la numérotation des pages sera un peu spéciale : à la page 0, on verra une image carrée dont la longueur du côté correspondra à 1 mètre dans la réalité. Chaque fois que l'on tournera une page en avançant dans le bouquin, la longueur réelle sera *multipliée* par 10. Inversement, en revenant en arrière d'une page, la longueur réelle sera *divisée* par 10. Ainsi, à la page –1, le côté de l'image correspondra à une longueur de 0.1 mètre.
On peut donc faire le tableau de correspondances suivant :

$-n$	...	–3	–2	–1	**0**	1	2	3	...	n
10^{-n}	...	0.001	0.01	0.1	**1**	10	100	1000	...	10^n

La base utilisée ici est 10. Par analogie avec le tableau de la fortune, on peut dire que le logarithme en base 10 de 10 est 1, parce que $10^1 = 10$; le logarithme en base 10 de 100 est 2 car $10^2 = 100$, etc.

Généralisons ce que nous venons de voir et prenons une base b quelconque. Notre tableau devient :

...	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	...
...	b^{-4}	b^{-3}	b^{-2}	b^{-1}	1	b	b^2	b^3	b^4	b^5	...

Il faut encore trouver comment raffiner notre table, c'est-à-dire savoir comment obtenir une table plus précise.
Dans la première ligne du tableau, entre les entiers a et a+1, il faudra insérer 9 **moyens arithmétiques** : a+0,1, a+0,2, …, a+0.9.
Dans la seconde ligne, il faut insérer 9 **moyens géométriques** entre a et a+1, de sorte à respecter la propriété décrite dans la table ci-dessous :

$\boldsymbol{a}$	a+0.1	a+0.2	a+0.3	a+0.4	a+0.5	a+0.6	a+0.7	a+0.8	a+0.9	$\boldsymbol{a}$**+1**
$\boldsymbol{g}$	$g \cdot r^1$	$g \cdot r^2$	$g \cdot r^3$	$g \cdot r^4$	$g \cdot r^5$	$g \cdot r^6$	$g \cdot r^7$	$g \cdot r^8$	$g \cdot r^9$	$\boldsymbol{g \cdot r^{10}}$

Il faut trouver le nombre r tel que $t_1 = g$ et $t_{11} = t_1 \cdot r^{10}$. Donc $r = \sqrt[10]{\frac{t_{11}}{t_1}}$.

Essayons par exemple de raffiner la table les logarithmes en base 10 entre 0 et 1. Nous avons $t_1 = 1$, $t_{11} = 10$ et donc $r^{10} = 10$, d'où $r = \sqrt[10]{10} \approx 1.259$. On obtient la table augmentée ci-dessous.

0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	**1**
1	1.259	1.585	1.995	2.512	3.162	3.981	5.012	6.309	7.94	**10**

En suivant le même principe, on pourra encore raffiner cette table par exemple entre 0.7 et 0.8, et ainsi de suite (voir exercice 6.4 c).

Exercice 6.1

Évaluez sans calculatrice (par convention, quand on écrit « log(x) », cela signifie « $\log_{10}(x)$ ») :

a. $\log(1)$ **b.** $\log(10^7)$ **c.** $\log\left(\frac{1}{10}\right)$ **d.** $\log\left(\frac{1}{\sqrt[4]{10}}\right)$

e. $\log(\sqrt[3]{100})$ **f.** $\log(-10)$ **g.** $\log(x)$, quand $x \to 0^+$ (x tend vers 0)

Exercice 6.2

Évaluez :

a. $\log_2(8)$ **b.** $\log_2(64)$ **c.** $\log_3(729)$ **d.** $\log_9(729)$ **e.** $\log_3(\sqrt[4]{27})$

f. $\log_2\left(\frac{1}{4}\right)$ **g.** $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$ **h.** $\log_2\left(\frac{1}{128}\right)$ **i.** $\log_{16}\left(\frac{1}{2}\right)$ **j.** $\log_9\left(\frac{1}{3}\right)$

Exercice 6.3

Résolvez les équations :

a. $x = \log_2(32)$ **b.** $\log_4(x) = 3$ **c.** $\log_x(125) = 3$

Exercice 6.4

À l'aide de votre calculatrice, évaluez log(9) de trois façons différentes (vous donnerez le résultat avec 3 chiffres après la virgule) :

a. en utilisant la touche LOG de votre calculatrice ;

b. par encadrements en utilisant la touche y^x (ou ^) de votre calculatrice ;

c. par la méthode des moyens géométriques.

6.3. Propriétés

Les relations suivantes sont vérifiées quelle que soit la base b (avec $b > 0$ et $b \neq 1$) :

1.a	$\log_b(1)=0$	**1.b**	$b^0=1$
2.a	$\log_b(b)=1$	**2.b**	$b^1=b$
3.a	$\log_b(b^x)=x$	**3.b**	$b^{\log_b(x)}=x$
4.a	$\log_b(u\cdot v)=\log_b(u)+\log_b(v)$	**4.b**	$b^x\cdot b^y=b^{x+y}$
5.a	$\log_b\left(\frac{u}{v}\right)=\log_b(u)-\log_b(v)$	**5.b**	$\frac{b^x}{b^y}=b^{x-y}$
6.a	$\log_b(u^v)=v\log_b(u)$	**6.b**	$(b^x)^y=b^{x\cdot y}$

On appelle **caractéristique** d'un logarithme la partie du nombre située avant la virgule et **mantisse** la partie située après la virgule.

Exercice 6.5

a. Calculez sur votre machine les logarithmes suivants :

log(1270), log(127), log(12.7), log(1.27), log(0.127), log(0.0127).

b. Que constatez-vous ?

c. Par quelle propriété des logarithmes l'expliquez-vous ?

Exercice 6.6

Mettez sous la forme $m\log(a) \pm n\log(b) \pm \ldots$:

a. $\log(a^2 b^3)$ **b.** $\log\left(\frac{a^3}{b^2}\right)$ **c.** $\log\left(\frac{a\cdot\sqrt{d}}{c\cdot\sqrt[3]{b}}\right)$

6.4. Définition du nombre *e*

Revenons à notre millionnaire. Une banque concurrente apparaît qui propose elle aussi un taux d'intérêt à 100 %, mais les intérêts sont capitalisés tous les mois au lieu de tous les ans. Ainsi, chaque mois, on ajoute à la fortune 1/12 du capital du mois précédent.

En mathématiques, un taux de 3% s'écrit 0.03, 100% s'écrit 1.

Formule des intérêts composés : $C_n = C_0(1+\mathrm{i})^n$
avec i : taux, C_0 : capital initial, C_n : capital après n « périodes ».

Si le millionnaire met 1 million le mois 0, sa fortune sera de $1+\frac{1}{12}$ le mois 1, $\left(1+\frac{1}{12}\right)^2$ le mois 2, etc.

Au bout d'une année, il aura, au lieu de 2 millions, $\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}$ = 2.613 millions.

Capitalisé tous les jours, ce million serait devenu en un an $\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}$ = 2.714 millions. Si enfin nous supposons que la fortune est capitalisée à chaque instant, le capital au bout d'un an sera la limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quand n tend vers l'infini.

À la limite, on démontre que cette somme n'est pas du tout infinie, mais égale à 2.718281828459045... Il est facile de constater ce phénomène sur une calculatrice. Depuis **Euler**, on désigne ce nombre par la lettre *e*.

Sur votre machine il faut calculer e^1 pour obtenir *e*.

On écrira $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cong 2.718281828459045...$

e est un nombre **transcendant**, comme π.

Si la base du logarithme est *e*, on parle de logarithme **naturel** ou **népérien** (de Lord **Napier**, **Neper** en français) ; son symbole est *ln*.

Exercice 6.7

Évaluez sans machine :

a. $\ln(\mathrm{e})$ **b.** $\ln(1)$ **c.** $\ln(\mathrm{e}^7)$ **d.** $\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ **e.** $\ln(\sqrt{\mathrm{e}})$ **f.** $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$

6.5. Résolution d'équations

Avant de pouvoir éliminer les logarithmes, il faut transformer l'équation en utilisant les propriétés du § 6.3 pour obtenir une équation du genre :

$$\log_b(x) = \log_b(y) \quad\Rightarrow\quad x = y$$

Remarquez bien que la base doit être la même.

De plus, il faudra vérifier les résultats dans l'équation de départ, car il n'est pas sûr que toutes les solutions soient valides. N'oubliez pas que le logarithme d'un nombre négatif ou nul n'existe pas !

Les équations où interviennent des logarithmes sont souvent sources d'erreurs. En voici quelques-unes, parmi les plus fréquentes :

- $\log_b(x) = k\cdot\log_b(y)$ n'implique **pas** que $x = k\cdot y$
- $\log_a(x) = \log_b(y)$ n'implique **pas** que $x = y$
- $\log_b(x) = \log_b(y) + \log_b(z)$ n'implique **pas** que $x = y + z$
- $\frac{\log_b(x)}{\log_b(y)} \neq \log_b\left(\frac{x}{y}\right)$ et $\frac{\log_b(x)}{\log_b(y)} \neq \frac{x}{y}$
- Ne pas oublier que si $0 < x < 1$, alors $\log_b(x) < 0$.

Exercice 6.8

Résolvez les équations :

a. $\log(x+1) - \log(3) = \log(2x-3) + \log(7)$

b. $\log_3(2x-5) + \log_3(3x+7) = 4\log_3(2)$

c. $\ln(x^2-7) = 2\ln(x+3)$

d. $\log(\sqrt{x+1})+\log(\sqrt{x-1})-\log(5)=0$

e. $\log(x^2+3x-1) = 2$

Exercice 6.9

Résolvez :

a. $3^x + 9^x = 90$ **b.** $e^{3x}=5$ **c.** $4e^{-3x}-3e^{-x}-e^x=0$

Indication pour **a** : Posez $y = 3^x$.

Exercice 6.10

Résolvez :

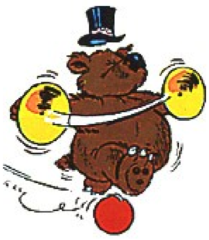
a. $2^{x^2}=512$ **b.** $7^{x^2+x}=49$ **c.** $\frac{1}{10^x}=10000$

Exercice 6.11

Résolvez les systèmes :

a. $\begin{cases}\log(x)+\log(y)=2\\ x+y=25\end{cases}$ **b.** $\begin{cases}\ln(x)-\ln(y)=1\\ x\cdot y=e\end{cases}$

6.6. Passage d'une base à une autre



Il existe deux bases de logarithme très utilisées : la base 10 et la base *e*. Les calculatrices ne comprennent d'ailleurs que ces deux bases.

On peut cependant utiliser comme base n'importe quel nombre **strictement positif et différent de 1**.

On passe d'une base à une autre par la formule :

$$\log_a(u)=\frac{\ln(u)}{\ln(a)}=\frac{\log(u)}{\log(a)}=\frac{\log_b(u)}{\log_b(a)}$$

Démonstration Nous avons d'abord les équations équivalentes

$$w = \log_a(u) \quad \text{et} \quad a^w = u$$

et nous procédons comme suit :

$a^w = u$

On prend $\log_b$ des deux côtés $\log_b(a^w) = \log_b(u)$

On applique la propriété **6.a** $w\cdot\log_b(a) = \log_b(u)$

$$w=\frac{\log_b(u)}{\log_b(a)}$$

Puisque $w = \log_a(u)$, nous obtenons bien la formule de passage.

❑

Exercice 6.12

Calculez à l'aide de votre calculatrice $\log_b 16$, pour b = 2, 3, ..., 16.

Exercice 6.13

Résolvez :

a. $\log(x) - \log(x+1) = 3\log(4)$ **b.** $\log_2(x+7) + \log_2(x) = 3$

c. $\log_3(x) = \frac{1}{2} + \log_9(4x+15)$ **d.** $\log_4(x) = \frac{1}{8}\log_2(x^2+2)$

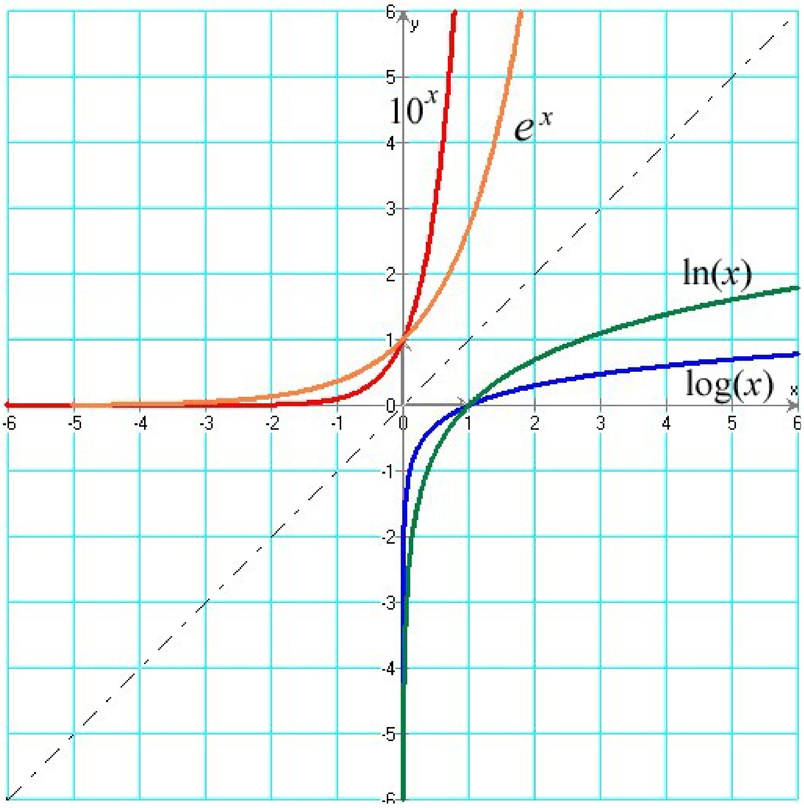
e. $\log_4(x) = -3 + \log_2(x+16)$ **f.** $\log_3(x)\cdot\log_9(x) = 2$

g. $\log(x^2) = \log^2(x)$

6.7. Graphes

Les deux courbes exponentielles (la rouge et l'orange) passent par le point (0, 1). Il en est ainsi quelle que soit la base de la puissance.

Les deux courbes logarithmiques (la verte et la bleue) passent par le point (1, 0). Il en est ainsi quelle que soit la base du logarithme.



Remarques

- Il existe une symétrie axiale par rapport à la bissectrice du premier quadrant. Les fonctions ln(x) et e^x sont **réciproques** l'une de l'autre. Idem pour log(x) et 10^x.
- $a^x > 0$ pour tout x, si $a > 0$.
- Si $a > 1$, a^x croît extrêmement vite. On parle alors de *croissance exponentielle*.
- À l'inverse, les fonctions logarithmiques croissent très lentement. Elles sont négatives quand $0 < x < 1$.

Exercice 6.14

Représentez graphiquement les fonctions :

a. $-\ln(x)$ **b.** $2 - \ln(x)$ **c.** $\ln(x - 3)$ **d.** $-e^x$ **e.** $2e^x$

6.8. Applications

Exercice 6.15

Tout corps radioactif se désintègre au cours du temps. Le nombre d'atomes radioactifs $N(t)$ au temps t (en années) est donné par :

$$\boxed{N(t)=N_0 \cdot e^{-\mu t}}$$

où N_0 est le nombre d'atomes radioactifs au temps $t = 0$ et μ un coefficient dépendant de la matière.

En particulier, le gaz carbonique de l'air contient en faible quantité du carbone 14, isotope radioactif du carbone. Tout être vivant participe au cycle du carbone. Tant qu'il est vivant, la proportion d'atomes de C14 par rapport à la masse de carbone qu'il contient est constante, soit $5 \cdot 10^{11}$ atomes de C14 par 12 g de carbone. Quand il meurt, les atomes de C14 commencent à se désintégrer suivant la loi énoncée ci-dessus, avec $\mu = 1.2 \cdot 10^{-4}$.

Pour estimer l'âge d'un objet d'origine animale ou végétale, il suffit donc d'évaluer le nombre d'atomes de C14 contenus dans 12 g de carbone prélevé sur cet objet.

a. On découvre un reste végétal contenant $5 \cdot 10^{10}$ atomes de C14 pour 12 g de carbone. Quel est son âge ?

b. On appelle *période* ou *demi-vie* d'un élément radioactif le temps nécessaire à la désintégration de la moitié du nombre initial d'atomes radioactifs.
Déterminez la demi-vie du carbone 14.

Exercice 6.16

La *chronologie glossienne* est une méthode permettant de dater un langage, fondée sur une théorie selon laquelle, durant une longue période, les changements linguistiques prennent place à un taux constant.

Supposons qu'un langage ait à l'origine N_0 mots de base et qu'au temps t, mesuré en millénaires, le nombre $N(t)$ de mots de base qui restent dans le langage courant est donné par :

$$\boxed{N(t)=N_0 \cdot 0.805^t}$$

a. Donnez approximativement le pourcentage de mots de base perdus tous les cent ans.

b. Si $N_0 = 200$, représentez le graphique de N pour $0 \le t \le 20$.

c. Combien d'années faudra-t-il pour que 3/4 des mots disparaissent ?

Exercice 6.17

Dans des conditions ordinaires de pression et de température, la pression atmosphérique $P(h)$ mesurée à l'altitude h est donnée par :

$$\boxed{P(h)=P_0 \cdot e^{-\alpha h}}$$

où P_0 est la pression au niveau de la mer et α un coefficient qui vaut 0.125 si h est exprimé en km et $P(h)$ en pascals (Pa). On suppose que la pression atmosphérique vaut 100'000 Pa à l'altitude 0.

a. Que vaut-elle à 2000 m d'altitude ?

b. À quelle altitude vaudra-t-elle 60'000 Pa ?

Exercice 6.18

La *loi de Beer-Lambert* stipule que la quantité de lumière I qui pénètre à une profondeur de x mètres dans l'océan est donnée par :

$$\boxed{I=I_0 \cdot c^x}$$

avec $0 < c < 1$ et où I_0 est la quantité de lumière à la surface.

a. Exprimez x en fonction de logarithmes décimaux.

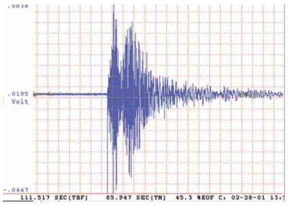
b. Si $c = 0.25$, calculez la profondeur à laquelle $I = 0.01 I_0$ (cela détermine la zone où la photosynthèse peut avoir lieu).

Exercice 6.19

Sur *l'échelle de Richter*, la magnitude R d'un tremblement de terre d'intensité I est donnée par la relation :

$$\boxed{R=\log\left(\frac{I}{I_0}\right)}$$

I_0 étant une intensité minimale donnée.



a. Si l'intensité d'un tremblement de terre est $1000 \cdot I_0$, calculez R.
b. Exprimez I en fonction de I_0 et R.
c. Les plus grandes magnitudes de séismes enregistrées se sont situées entre 8 et 9 sur l'échelle de Richter. Calculez les intensités correspondantes en fonction de I_0.
d. Au centre des États-Unis, l'aire A (en m^2) touchée par un séisme est liée à la magnitude par la formule R = 2.3 log(A + 14'000) – 6.6. Calculez l'aire de la région touchée pour une magnitude 4.
e. Le nombre annuel moyen n de séismes qui ont une magnitude entre R et R+1 vérifie plus ou moins la formule log(n) = 7.7 – 0.9R. Combien y a-t-il en une année de séismes de magnitude comprise entre 4 et 5 ?

Exercice 6.20

a. En septembre 1983, le plus grand nombre premier connu était $2^{132'049} - 1$. Combien ce nombre a-t-il de chiffres ?

Record encore battu en 2016 ! Curtis **Cooper**, mathématicien de l'Université centrale du Missouri (Etats-Unis) a découvert, le 7 janvier 2016, le plus grand nombre premier, dit « nombre de Mersenne » et qui équivaut à $2^{74207281} - 1$ et contient plus de 22.3 millions de chiffres.

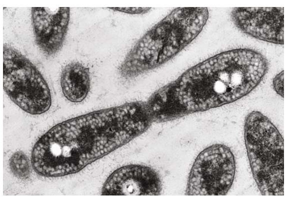
b. Début 2013, un chercheur américain de l'université du Missouri, Curtis **Cooper**, annonce la découverte du plus grand nombre premier jamais trouvé : $2^{57885161} - 1$. Combien ce nombre a-t-il de chiffres ?

Cela correspond à un fichier texte de 22 Mo. Comptez environ 4000 feuilles A4 si vous souhaitez l'imprimer avec une taille de police classique (Times New Roman 12). Il est impossible d'appréhender ce que représente un tel nombre. À titre de comparaison, il faut moins de cent chiffres pour effectuer le décompte du nombre de particules (neutrons, protons et électrons) contenues dans tout l'univers !
Il aura fallu 39 jours à son ordinateur pour vérifier la primalité du petit nouveau, le 25 janvier 2013. Trois preuves indépendantes réalisées par des chercheurs différents, sur des machines différentes, avec des algorithmes différents, ont permis de s'assurer qu'il ne s'agissait pas d'un « faux positif ». Ce résultat a valu à son découvreur et à son institution un prix de 3000$ versé par la fondation GIMPS. Celui qui découvrira le premier nombre premier à plus de 100 millions de chiffres touchera, lui, le jackpot: il pourra partager avec les fondateurs de GIMPS la récompense de 150'000$ promise par l'*Electronic Frontier Foundation*. Un prix de 250'000$ est aussi prévu pour le franchissement de la barrière du milliard de chiffres.

Exercice 6.21

Le nombre de bactéries $N(t)$ que renferme une culture au temps t (exprimé en jours) est donné par :

$$\boxed{N(t)=N_0 \cdot e^{\beta t}}$$



où N_0 est le nombre initial de bactéries et β un coefficient dépendant du type de bactéries et du milieu ambiant.
On a estimé le nombre de bactéries d'une culture à 200'000 après 3 jours et à 1'600'000 après 4.5 jours.

a. Quel est le nombre de bactéries après 5 jours ?
b. Quand la culture contient-elle 800'000 bactéries ?
c. Représentez le nombre de bactéries en fonction du temps sur un graphique muni d'une échelle linéaire, puis sur un graphique muni d'une **échelle semi-logarithmique**, que vous trouverez à la dernière page de ce chapitre.

Exercice 6.22

Une **courbe logistique** est le graphe d'une équation de la forme :

$$y=\frac{k}{1+b\,e^{-cx}}$$

où *k*, *b* et *c* sont des constantes positives. On utilise une courbe de ce genre pour décrire une population *y* dont la croissance d'abord rapide a ensuite diminué après que *x* ait atteint une certaine valeur.
Dans une étude fameuse de Gause sur la croissance des protozoaires, une population de *Paramecium caudata* a pu être décrite par une équation logistique, avec c = 1.1244, k = 105 et *x* est le temps en jours.

a. Calculez *b* si la population initiale est de 3 individus.
b. Dans cette étude, la croissance maximale se situe en y = 52. À quel moment cela s'est-il produit ?
c. Montrez qu'après une longue période de temps, la population décrite par une courbe logistique tend vers une constante *k*.
d. Esquissez la courbe logistique de cette étude.

Exercice 6.23

La longueur (en cm) de beaucoup de poissons de *t* années communément mis en vente peut être donnée par une fonction de croissance de *von Bertalanffy* de la forme :

$$f(t)=a\left(1-b\,e^{-kt}\right)$$

où *a*, *b* et *k* sont des constantes.

a. Pour le flétan du Pacifique, a = 200, b = 0.956 et k = 0.18. Donnez la longueur d'un flétan de 10 ans.
b. On a pêché un flétan d'une longueur de 1 mètre. Quel est son âge ?
c. Déterminez la longueur maximale que peut atteindre un flétan du Pacifique.

Exercice 6.24

Le **classement Elo** est un système d'évaluation qui peut servir à comparer deux joueurs d'une partie, et est utilisé par de nombreux jeux en ligne. La formule Elo ci-dessous donne la différence (*D*) de niveau entre deux joueurs en fonction de la probabilité de gain (*p*).

$$D(p)=400\cdot\log\left(\frac{p}{1-p}\right)$$

a. Calculez la fonction réciproque *p*(*D*), qui donne la probabilité de gain en fonction de la différence Elo *D*.

Aux échecs, la fonction *p*(*D*) est utilisée pour calculer le nouvel Elo E_{n+1} en fonction de l'ancien E_n : $E_{n+1} = E_n + 15\cdot(W - p(D))$. *W* est le résultat de la partie et vaut 1 pour une victoire, 0.5 pour un nul et 0 pour une défaite.

b. Un joueur classé 1800 Elo joue contre un joueur classé 2005 Elo. En cas de match nul, quel sera le nouveau classement Elo des deux joueurs ?

6.9. Ce qu'il faut absolument savoir

Connaître parfaitement les propriétés des logarithmes et exponentielles	❏ ok
Retrouver la valeur du nombre *e* sur sa calculatrice	❏ ok
Changer la base d'un logarithme	❏ ok
Résoudre une équation avec des logarithmes et des exponentielles	❏ ok
Reconnaître et dessiner la courbe d'un logarithme et d'une exponentielle	❏ ok